Chapitre 6

Couples de variables aléatoires

6.1 Généralités

Dans cette section, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on considère deux variables aléatoires X et Y. On veut savoir comment caractériser le comportement de ces deux variables aléatoires conjointement.

Définition 6.1.1
On appelle couple de variables aléatoires X et Y*, noté* (X, Y) *l'application*

Définition 6.1.2
On appelle tribu associée au couple (X, Y) *la plus petite tribu contenant tous les événements*

On la note $\mathcal{A}_{(X,Y)}$

Définition 6.1.3
On appelle loi du couple aléatoire (X, Y) *la donnée de fonction* $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, appelée* fonction de répartition conjointe*, définie par*

On dira donc que deux couples aléatoires suivent la même loi conjointe s'ils ont les mêmes fonctions de répartitions conjointes.

On a le théorème (admis) suivant

Théorème 6.1.4
*Soient X_1, Y_1, X_2, Y_2 quatre variables aléatoires. Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *.*

Alors si les couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) ont la même loi, alors

EXEMPLE

On admet que la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est continue. Alors si deux couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) ont la même loi, les variables aléatoires $X_1 + Y_1$ et $X_2 + Y_2$ ont la même loi.

On va maintenant, après quelques rappels sur l'indépendance de variables aléatoires, se concentrer sur les variables aléatoires discrètes.

6.2 Rappels sur l'indépendance

Définition 6.2.1
Deux événements A et B sont dits indépendants *si*

C'est trivialement équivalent, quand $P(A) \neq 0$, à dire que $P_A(B) = P(B)$.

Définition 6.2.2
Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, les événements $(X \leqslant x)$ et $(Y \leqslant y)$ sont indépendants, i.e.

Proposition 6.2.3
Soient X et Y deux variables aléatoires. Sont équivalentes :

i X et Y *sont indépendantes*

ii *Pour tous I, J intervalles de $\mathbb{R}$,*

$$P(X \in I \cap Y \in J) =$$

iii *pour tous événements $A \in \mathcal{A}_x$ † et $B \in \mathcal{A}_Y$,*

$$P(A \cap B) =$$

*. Pour la définition de la continuité d'une fonction de plusieurs variables, on renvoie le lecteur au chapitre concerné

†. On rappelle que $\mathcal{A}_X$ est la plus petite tribu contenant les événements $X \leqslant x$

Proposition 6.2.4
Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour toutes fonctions f et g, $f(X)$ et $f(Y)$ sont indépendantes.

Dans le cas de variables aléatoires discrètes, on peut caractériser simplement l'indépendance :

Proposition 6.2.5
Si X et Y sont discrètes, alors X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega),\ P(X = x \cap Y = y) =$$

Dans le cas d'indépendance, on peut facilement calculer des espérances conditionnelles

Proposition 6.2.6
Si X et Y sont discrètes et indépendantes, alors pour tout événement $B \in \mathcal{A}_Y$ de probabilité non nulle,

$$E(X \mid B) =$$

Démonstration. On a, par définition d'espérance conditionnelle

$$E(X \mid B) =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

□

6.3 Couples de variables aléatoires discrètes

Dans cette section, X et Y sont deux variables aléatoires discrètes. On note $\{x_i \mid i \in I\}$ (resp. $\{y_j \mid j \in J\}$) l'image de X (resp. Y).

D'après la définition, la loi de (X, Y) est entièrement déterminée par la donnée de

$$\forall i \in I,\ \forall j \in J,\ p_{i,j} =$$

Dans le cas où X et Y sont finies, on pourra donc représenter la loi conjointe sous forme d'un tableau :

(X,Y)		Valeurs de Y			
		y_1	y_2	$\cdots$	y_p
Valeurs de X	x_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\cdots$	$p_{1,p}$
	x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$\cdots$	$p_{2,p}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	x_n	$p_{n,1}$	$p_{n,2}$	$\cdots$	$p_{n,p}$

EXERCICE

On lance simultanément deux dés. On note X le plus petit des deux dés, et Y le plus grand. Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

Réciproquement :

Proposition 6.3.1
Une suite double $(p_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ est la loi conjointe d'un couple aléatoire discret si et seulement si

- $\forall i \in I,\ \forall j \in J,\ p_{i,j} \geqslant 0$
- *la série double $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{i,j}$ converge absolument vers 1.*

Démonstration. Le sens direct est facile : les $p_{i,j}$ étant des probabilités, ils sont forcément positifs. De plus, les événements $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ forment un système complet, et donc la somme de leurs probabilités vaut 1.

Le sens réciproque est admis. □

Définition 6.3.2
On appelle lois marginales du couple (X,Y) *les lois de X et de Y.*

Il est facile de trouver les lois de X et Y à partir de la loi conjointe :

Proposition 6.3.3
La loi de X est donnée par

$$\forall i \in I,\ P(X = x_i) = \sum_{j\in J} p_{i,j}.$$

De même, la loi de Y est donnée par

$$\forall j \in J,\ P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{i,j}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la

□

NOTA

Dans le cas de lois finies, en représentant la loi du couple comme un tableau, il suffit de sommer les éléments des lignes (resp. des colonnes) pour trouver la loi de X (resp. Y).

(X,Y)		Valeurs de Y				Somme de la ligne
		y_1	y_2	$\cdots$	y_p	
Valeurs de X	x_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\cdots$	$p_{1,p}$	$P(X = x_1)$
	x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$\cdots$	$p_{2,p}$	$P(X = x_2)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	x_n	$p_{n,1}$	$p_{n,2}$	$\cdots$	$p_{n,p}$	$P(X = x_n)$
Somme de la colonne		$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	$\cdots$	$P(Y = y_p)$	1

EXERCICE

Déterminer les lois marginales de l'exercice précédent.

Il est donc facile de trouver les lois marginales à partir de la loi conjointe. En revanche, il est souvent très difficile de faire l'opération inverse : il n'y a pas, dans le cas général, de façon simple de trouver la loi conjointe connaissant les lois marginales.

En revanche, si les variables sont indépendantes :

Proposition 6.3.4
Si X et Y sont indépendantes, alors pour tous i, j

$$p_{i,j} =$$

Définition 6.3.5
Soit $i \in I$ tel que $P(X = x_i) \neq 0$. On appelle loi conditionnelle de Y sachant $X = x_i$

l'application

$$\begin{array}{ccc} \{y_j \mid j \in J\} & \longrightarrow & [0,1] \\ y_j & \longmapsto & P_{X=x_i}(Y=y_j) = \end{array}$$

On a alors, en appliquant directement la formule des probabilités totales

Proposition 6.3.6
On suppose que tous les $P(X=x_i)$ et $P(Y=y_j)$ sont non nuls. Alors pour tous i,j

- $p_{i,j} =$
- $P(X=x_i) =$
- $P(Y=y_j) =$

Comme dit précédemment, les lois marginales ne suffisent pas à déterminer la loi conjointe, mais une loi marginale et les lois conditionnelles de l'autre variables suffisent.

6.4 Fonctions de deux variables aléatoires

Comme on l'a vu, on peut prendre la fonction d'un couple de variable aléatoire.

Proposition 6.4.1
Si X et Y sont discrètes, alors pour toute fonction, $g(X,Y)$ est discrète.

On considérera donc des variables comme $X+Y$, $\max(X,Y)$, $\min(X,Y)$, *etc.*

Pour trouver la loi de $g(X,Y)$, *i.e.* pour calculer les $P(g(X,Y)=z)$, il suffit de sommer les $P(X=x\cap Y=y)$ pour tous les x,y tels que $g(x,y)=z$:

$$P(g(X,Y)=z) = \sum_{g(x,y)=z} P(X=x\cap Y=y).$$

On peut alors appliquer le théorème de transfert

Théorème 6.4.2 : de transfert
La variable aléatoire $Z=g(X,Y)$ admet une espérance si et seulement si la série double $\sum g(x,y)P(X=x\cap Y=y)$ converge absolument, et dans ce cas

$$E(Z) =$$

EXERCICE

En se servant du théorème de transfert, montrer la linéarité de l'espérance

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

6.4.1 Somme de deux variables indépendantes

Proposition 6.4.3
Si X et Y sont indépendantes, alors

$$P(X + Y = z) =$$

On dit alors que la loi de $X + Y$ est le *produit de convolution* des lois de X de Y.

Démonstration. On a vu comment trouver la loi de $g(X, Y)$:

$$P(X + Y = z) =$$

$$=$$

□

EXERCICE

On lance deux dés à six faces équilibrés, et on regarde la somme S des valeurs indiquées. Donner la loi de probabilité de S.

On a alors certains résultats de stabilité.

Proposition 6.4.4
L'ensemble des lois de Poisson est stable.

Plus précisemment, soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, indépendantes. Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

Démonstration. On a, d'après la formule précédente

$$P(X+Y=n) =$$

$$=$$

On sait que $P(X=i) =$ et $P(Y=n-i) =$. Donc

$$P(X+Y=n) =$$

En appliquant la formule du binôme, on obtient donc bien

$$P(X+Y=n) =$$

$$=$$

□

Proposition 6.4.5
L'ensemble des lois binomiales de probabilité p est stable.

Plus précisement, soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ indépendantes. Alors

$$X+Y \hookrightarrow$$

Démonstration. En revenant à la définition de loi binomiale :

- X correspond au nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p
- Y correspond au nombre de succès dans la répétition de m épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p

$X+Y$ est donc le nombre de succès dans la répétition de $n+m$ épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. □

6.4.2 Maximum de deux variables

Proposition 6.4.6
On a, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$(\max(X,Y) \leqslant z) =$$

Si X et Y sont indépendantes, on a alors

$$F_{\max(X,Y)}(z) =$$

Démonstration. Le premier point est évident par définition du max.

Si X et Y sont indépendantes, on a alors

$$\begin{aligned} F_{\max(X,Y)}(z) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

□

On note que dans le cas du max, c'est la fonction de répartition qui nous donne la loi de probabilité.

EXERCICE

En procédant de la même façon, trouver la loi de $\min(X, Y)$.

6.5 Covariance et corrélation linéaire

Dans cette section, on reprend les variables aléatoires discrètes de la section précédente.

Commençons par essayer de calculer l'espérance d'un produit de variables aléatoires.

Proposition 6.5.1
Si X, Y sont indépendantes, alors si X et Y admettent une espérance, alors XY aussi et

$$E(XY) =$$

Démonstration. D'après le théorème de transfert, il suffit d'étudier la convergence et de calculer la somme double

$$\sum_{i \in I, j \in J}$$

On a donc

$$\begin{aligned} &= \\ &= \end{aligned}$$

Comme X et Y admettent une espérance, la somme converge bien, et donc XY admet une espérance. De plus

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I, j\in J} &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \\ &= \sum_{i\in I} \\ &= E(X)E(Y)\end{aligned}$$

□

EXERCICE

Montrer que, dans le cas où X et Y ne sont pas indépendantes mais admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet toujours une espérance.

6.5.1 Covariance

Définition 6.5.2
Si x et Y admettent un moment d'ordre 2[‡]*, on appelle* covariance de X et Y *le nombre réel*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) =$$

NOTA

D'après l'exercice précédent, puisque X et Y ont un moment d'ordre 2, XY admet bien une espérance.

NOTA

On note que la covariance d'une variable avec elle-même est égale à la variance.

Proposition 6.5.3 : Formule de Hyugens
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors

$$\mathrm{Cov}(X,Y) =$$

Démonstration.

‡. C'est équivalent à dire qu'elles possèdent une variance

□

La covariance est une fonction bilinéaire, symétrique et positive :

Proposition 6.5.4
On suppose que X, Y, Z admettent un moment d'ordre 2. Alors

- Symétrie :
- Bilinéarité :
  - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
  - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
- Positivité :

Démonstration. La preuve est triviale en utilisant la linéarité de l'espérance. □

Proposition 6.5.5
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 et sont indépendantes, alors

NOTA

Attention ! La réciproque est fausse. La nullité de la covariance n'est en aucun cas une condition nécessaire et suffisante d'indépendance. On pourra retenir le contre-exemple suivant :
Soit Z une variable qui vaut -1 et 1 avec probabilités respectives $\frac{1}{2}$ §. Soit X une variable aléatoire discrète quelconque admettant une espérance et une variance, indépendante de Z.
Alors X et $Y = ZX$ ne sont pas indépendantes, mais

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^2 Z) - E(X)E(ZX) = 0.$$

On peut s'en servir pour calculer, dans le cas d'indépendance, la variance d'une somme de variables aléatoires.

Théorème 6.5.6
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors $X+Y$ admet un moment d'ordre 2, et

$$V(X+Y) =$$

En particulier, dans le cas où X et Y sont indépendantes, on a donc

$$V(X+Y) =$$

§. On dit que Z suit la loi de Rademacher

Démonstration. Il suffit de calculer :

$$V(X+Y) =$$
$$=$$
$$=$$
$$=$$

□

NOTA

Dans le cas où on connaît la loi de $X+Y$, on peut s'en servir pour calculer la covariance :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) =$$

On va maintenant définir le *coefficient de corrélation linéaire* : ce coefficient sert à déterminer si deux mesures aléatoires sont corrélées ou non.

NOTA

Attention à ne pas confondre *corrélation* et *causalité*. Deux grandeurs peuvent être très corrélées sans avoir de lien de causalité entre elles (par exemple, la consommation de chocolat et le nombre de prix Nobel d'un pays sont très corrélés [¶], mais *a priori* pas liés par un quelconque effet de causalité. On renvoie le lecteur intéressé au sophisme *"Cum hoc ergo propter hoc"*.

Définition 6.5.7

On suppose que X et Y admettent une variance non nulle. On appelle coefficient de corrélation entre X et Y *le nombre réel*

$$\rho_{X,Y} =$$

Commençons par regarder pour quelles variables on ne peut pas calculer le coefficient de corrélation, *i.e.* les variables de variance nulle.

Proposition 6.5.8

La variance d'une variable discrète X est nulle si et seulement si
Dans ce cas, la constante est $E(X)$.

Démonstration. Le sens réciproque est évident.

¶. Franz H. Messerli, Chocolate Consumption, Cognitive Function, and Nobel Laureates, The new england journal of medicine.

Supposons donc que $V(X) = 0$. Par le théorème de transfert,

$$V(X) =$$

Comme chaque terme de la somme est positif, chacun est nul :

$$\forall i \in I,$$

Donc, pour tous les $x_i \neq E(X)$, on a $P(X = x_i) = 0$, et donc nécessairement $P(X = E(X)) = 1$. □

Finalement, les seuls cas où on ne peut pas calculer le coefficient de corrélation sont quand une des deux variables est presque sûrement constante, ce qui arrive rarement.

Proposition 6.5.9 : Inégalité de Cauchy-Schwarz
Si X et Y admettent des moments d'ordre 2, alors

Démonstration. C'est une inégalité de Cauchy-Schwarz, aussi on étudie la fonction $\varphi : t \mapsto V(tX - Y)$.

On a $V(tX - Y) =$: φ est un

On en déduit donc que $4\,\mathrm{Cov}(X, Y)^2 \leqslant 4V(X)V(Y)$, et donc le résultat. □

Corollaire 6.5.10
Le coefficient de corrélation est un réel de $[-1, 1]$.

On remarque que dans la preuve précédente, on a égalité si et seulement si le trinôme φ s'annule exactement une fois ; notons a le réel tel que $V(aX - Y) = 0$. Mais alors $aX - Y$ est presque sûrement constante égale à un certain b. On a donc

Proposition 6.5.11
Si $|\rho_{X,Y}| = 1$, alors

Plus précisemment, a est du signe de

Démonstration. On a déjà vu le premier point.

Dans le cas où $Y = aX + b$ presque sûrement, on a donc

$$\mathrm{Cov}(X, Y)$$

Donc $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et a sont de même signe. □

Finalement, plus le coefficient de corrélation entre deux variables est proche de 1 ou -1, plus la dépendance linéaire entre les deux est grande (quand on trace le graphique de l'une en fonction de l'autre, on a “presque” une droite). Plus le coefficient est proche de zéro, moins les variables sont linéairement liées.

En revanche, cela ne nous dit rien sur une éventuelle corrélation quadratique, exponentielle, *etc.*

Le signe du coefficient indique quant à lui le sens de corrélation : s'il est positif, alors les variables évoluent dans le même sens, et s'il est négatif, elles évoluent en sens contraire.

6.6 Exercices

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de Y sachant $X = n$ est binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$.

a) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

b) Reconnaître la loi de Y.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.

b) Déterminer la loi marginale de Y.

c) Sachant
$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$
Reconnaître la loi de X

d) Les variables X et Y sont elle indépendantes ?

Exercice 3. Soient $X, Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Les variables $Z = \min(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 4. Soient X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P) et f une application définie sur $X(\Omega)$. À quelle condition les variables aléatoires X et $f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 5. On suppose que le nombre de personnes qui se présentent à l'entrée d'un cinéma en une heure est une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Le cinéma comporte $N \leqslant 3$ caisses, et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les N. On note, pour $i \in [\![1, N]\!]$, X_i le nombre de personnes ayant choisi la caisse i.

a) Déterminer la loi de X_i sachant $X = n$, puis en déduire la loi de X_i.

b) Déterminer, sans calculs, la loi de $X_1 + X_2$.

c) En déduire la covariance de X_1 et X_2.

d) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
Indication : On pourra montrer que pour tous i, j, n tels que $n \geqslant i + j$, $\frac{1}{n!}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} = \frac{1}{i!j!(n-i-j)!}$

e) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X_1 et X.

Exercice 6. Soient $U, V \hookrightarrow \mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$ indépendantes.

a) On pose $S = (U-1)^2 + (V-1)^2$. Déterminer la loi de S.
b) On pose $T = (U-1)(V-1) + 1$. Calculer $E(S(T-1))$.
c) Déterminer la loi de T.
d) Calculer la covariance de S et T. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. Soient X et Y deux variables de Bernoulli.

a) Montrer que $|\operatorname{Cov}(X, Y)| \leqslant \frac{1}{4}$.
b) Montrer qu'elles sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

Exercice 8. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes, indépendantes, admettant la même espérance $M \neq 0$ et la même variance $V \neq 0$.

a) Calculer l'espérance et la variance de XY en fonction de M et V.
b) Les variables $X + Y$ et XY sont-elles indépendantes ?

Exercice 9. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages indépendants avec remise, et on note X le numéro de la première boule et Y celui de la seconde.

On note I le plus petit numéro des deux, et S le plus grand.

a) Donner les lois de I et S.
b) Calculer les espérances, puis les variances de I et S.
c) Calculer $V(I+S)$ et fonction de $V(X)$ et $V(Y)$. En déduire le coefficient de corrélation linéaire de I et S.