ECS2 : Cours de mathématiques

Lycée Henri Bergson

2017 - 2018

Exercice 8

a) On a, par indépendance, $E(XY) = E(X)E(Y) = M^2$.

De plus, $V(XY) = E((XY)^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - M^4 = (V + M^2)^2 - M^4 = V^2 + 2VM^2$.

b) On a donc $\text{Cov}(X + Y, XY) = E((X + Y)XY) - E(X + Y)E(XY) = E(X^2Y) + E(XY^2) - E(X)^2E(Y) - E(Y)^2E(X) = 2MV \neq 0$.

La covariance étant non nulle, $X + Y$ et XY ne sont pas indépendantes.

Exercice 9

a) On sait que X et Y suivent des lois uniformes sur $[\![1, n]\!]$. On a, pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned}
P(S = k) &= P(X = k \cap Y = k) + P(X = k \cap Y < k) + P(Y = k \cap X < k) \\
&= P(X = k) \times P(Y = k) + P(X = k) \times P(Y < k) + P(Y = k) \times P(X < k) \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{k-1}{n} \\
&= \frac{2k-1}{n^2}
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
P(I = k) &= P(X = k \cap Y = k) + P(X = k \cap Y > k) + P(Y = k \cap X > k) \\
&= P(X = k) \times P(Y = k) + P(X = k) \times P(Y > k) + P(Y = k) \times P(X > k) \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{n-k}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{n-k}{n} \\
&= \frac{2n-2k+1}{n^2}
\end{aligned}$$

b) On a donc

$$\begin{aligned}
E(S) &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{2k-1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2}\left(2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}
\end{aligned}$$

De même,

$$E(S^2) = \frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n}.$$

On en déduit, par la formule de Huygens,

$$V(S) = (n+1)\frac{2n^3-2n^2+n-1}{36n^2}.$$

En procédant de la même façon, on obtient

$$E(I) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \quad \text{et} \quad V(I) = (n+1)\frac{2n^3-2n^2+n-1}{36n^2}.$$

c) On a $I+S = X+Y$, et donc $V(I+S) = V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ par indépendance. On a donc

$$\operatorname{Cov}(I,S) = \frac{1}{2}(V(I+S)-V(I)-V(S)) = \left(\frac{n^2-1}{6n}\right)^2.$$

On en déduit alors

$$\rho_{I,S} = \frac{1}{2n^2+1}.$$