Chapitre 7

Réduction des endomorphismes

7.1 Éléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme

Dans toute cette section, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 7.1.1
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- *On dit que λ est une valeur propre de f si*

- *On dit que $x \in E\backslash\{0\}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si*

- *On notera $E_\lambda(f)$ l'ensemble*

$$E_\lambda(f) =$$

On note alors $\mathrm{Spec}(f)$*, appelé* spectre de f *l'ensemble des valeurs propres de f.*

On définit de la même façon les éléments propres d'une matrice :

Définition 7.1.2
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- *On dit que λ est une valeur propre de A si*

- *On dit que* $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\backslash\{0\}$ *est une colonne propre de* A *associé à la valeur propre* λ *si*
- *On notera* $E_\lambda(A)$ *l'ensemble*

$$E_\lambda(A) =$$

On note alors $\mathrm{Spec}(A)$*, appelé* spectre de A *l'ensemble des valeurs propres de* A*.*

On a alors le théorème attendu :

Proposition 7.1.3
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* A *la matrice de* f *dans une base de* E*. Alors :*

-
-

Autrement dit, chercher les éléments propres de f *revient exactement à trouver les éléments propre de n'importe quelle matrice représentant* f*.*

Corollaire 7.1.4
Deux matrices semblables ont exactement le même spectre, et leurs sous-espaces propres sont de même dimension.

NOTA

Ceci nous donne une caractérisation de plus pour montrer que deux matrices ne sont pas semblables, comme on l'avait vu pour la trace et le rang.

Proposition 7.1.5 : Structure des sous-espaces propres
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$*. Alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $E_\lambda(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* E*. De plus,*

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(f) \Leftrightarrow$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $E_\lambda(f) =$.

De plus, si $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, alors

□

Méthode de recherche des valeurs propres En pratique, on utilisera la proposition suivante pour trouver des valeurs propres :

Proposition 7.1.6
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit A la matrice de f dans une base. Alors sont équivalentes :

(i) λ est valeur propre de f

(ii)

(iii)

Pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme, on fera donc dans l'ordre :

- Écrire la matrice A de f dans une base
- Pour un λ quelconque, calculer le rang de la matrice $A - \lambda I_n$ avec la méthode de Gauss. *Attention : il faudra souvent distinguer certaines valeurs de λ.*
- Regarder pour quelles valeurs de λ ce rang est strictement plus petit que la dimension de l'espace.

NOTA

Dans la méthode du pivot, on essayera tant que possible d'échanger des lignes pour éviter les λ sur la diagonale, sauf tout en bas à droite. Si c'est impossible, il faudra alors distinguer des valeurs de λ.

EXERCICE

Trouver les valeurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x,y,z) = (2x+z, x+y+z, x+z).$$

On note qu'avec cette méthode, on trouve directement (en utilisant le théorème du rang) la dimension des sous-espaces propres : il suffit de remplacer λ par les valeurs trouver, et d'utiliser la forme échelonnée pour trouver le rang de $A - \lambda I_n$.

Cas particuliers Dans certains cas, il est plus simple de trouver les valeurs propres.

Pour une matrice 2×2, on pourra utiliser le directement la proposition suivante :

Proposition 7.1.7
Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *une matrice. Alors*

$$\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \Leftrightarrow$$

Démonstration. On sait qu'une matrice 2×2 est inversible si et seulement si
Or le déterminant de $A - \lambda I_2$
vaut

$\det(A) =$

□

EXERCICE

Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

Pour une matrice triangulaire, on a

Proposition 7.1.8
Si A est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont exactement

De plus, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est inférieure ou égale

Démonstration. On sait qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si

. Il suffit donc d'écrire $A - \lambda I_n$ pour se convaincre du résultat.

De plus, si $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ et que λ apparaît k fois sur la diagonale, alors $A - \lambda I_n$ possède exactement .
On a donc $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geqslant$, et on en déduit

$$\dim(E_\lambda(A)) \leqslant$$

□

Pour les matrice diagonales, le résultat reste le même, avec une amélioration pour les dimensions des sous-espaces propres.

Corollaire 7.1.9
Si A est une matrice diagonale, alors ses valeurs propres sont

De plus, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est égale

7.2 Polynômes et somme de sous-espaces propres

7.2.1 Polynômes

Commençons par un résultat simple :

Proposition 7.2.1
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \operatorname{Spec}(f)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors
, et tout vecteur propre de f associé à λ est vecteur propre de $P(f)$ associé à $P(\lambda)$. Autrement dit :

Démonstration. Comme pour beaucoup de démonstrations sur les polynômes d'endomorphisme, on commence par montrer le résultat sur les monômes X^i. On le fait par récurrence : soit donc $x \in E_\lambda(f)$.

- Pour $i = 0$, il est facile de voir que
- Supposons que $f^i(x) = \lambda^i x$. Alors

$$\begin{aligned} f^{i+1}(x) &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu pour les monômes. Maintenant, si $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, on a alors

$$P(f)(x) =$$

□

On en déduit une condition nécessaire pour être une valeur propre :

Proposition 7.2.2
Si P est un polynôme annulateur d'un endomorphisme f, alors

Démonstration. Si λ est une valeur propre de f, on sait que $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$, qui est nul. Or l'unique valeur propre de l'endomorphisme nul est 0, donc . □

NOTA

Attention, la réciproque est fausse. Trouver les racines d'un polynôme annulateur donne juste des valeurs possibles pour les valeurs propres. Il faut ensuite regarder pour chaque valeur trouvée si c'est bien une valeur propre.

EXERCICE

Trouver un exemple d'endomorphisme (ou de matrice) et de polynôme montrant que la réciproque est fausse.

EXEMPLE

Soit p un projecteur. Alors $X^2 - X$ annule p, et donc les seuls valeurs possibles pour les valeurs propres sont 0 et 1.

On donne un résultat classique sur les polynômes avant le théorème suivant :

Théorème 7.2.3 : d'interpolation de Lagrange [*]
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p \in \mathbb{K}$, les x_i distincts deux à deux.

Alors il existe une unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que

Démonstration. Soit φ l'application linéaire [†] définie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ P & \longmapsto & \end{array} .$$

Si $P \in \ker(\varphi)$, alors pour tout x_i, $P(x_i) = 0$. P est donc un polynôme de degré ayant racines distinctes, donc nul.

Finalement, φ est injective, et pour des raisons de dimensions, bijective.

Il existe donc un unique polynôme antécédent de $(y_1, \dots, y_p)$. □

NOTA

Cette preuve est non constructive, c'est-à-dire qu'on ne sait pas comment trouver le polynôme en question, on sait juste qu'il existe.

*. Joseph-Louis Lagrange, Mathématicien italien et français, 1736 – 1813
†. Exercice : vérifier que c'est bien une application linéaire

7.2.2 Somme de sous-espaces propres

On rappelle la définition de somme directe :

Définition 7.2.4
Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe si

On note alors la somme $\bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

C'est équivalent à dire que concaténer des bases des F_i donne une base de la somme.

Théorème 7.2.5
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes deux à deux de f. Alors la somme de sous-espaces propres $\bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f)$ est une somme directe.

Démonstration. Soient donc pour tout i $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ tels que $x_1 + \cdots + x_p = 0$.

Soit P_i un polynôme ‡ tel que On a alors

$$P_i(f)(x_1 + \cdots + x_p) =$$
$$=$$
$$=$$

Comme la somme $x_1 + \cdots x_p$ est nulle, on en déduit . □

Corollaire 7.2.6
La dimension de la somme des sous-espaces propres de f est la somme des dimensions des sous-espaces propres :

En particulier, la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.

‡. donné par le théorème d'interpolation de Lagrange

Corollaire 7.2.7
Un endomorphisme de E (ou de façon équivalente, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) possède au plus valeurs propres.

Corollaire 7.2.8
Si un endomorphisme de E (ou de façon équivalente, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) possède n valeurs propres distinctes, alors chaque sous-espace propre est de dimension 1.

7.3 Diagonalisation

Le but de la recherche de valeurs propres et sous-espaces propres est de pouvoir trouver des bases dans lesquelles les matrices sont simples, et au mieux diagonales.

Définition 7.3.1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est diagonalisable *s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.*

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est diagonalisable s'il existe des matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que

$$M = PDP^{-1}.$$

7.3.1 Base de vecteurs propres

Commençons par remarquer que si on a une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, alors les e_i sont nécessairement des vecteurs propres de f.

Réciproquement :

Proposition 7.3.2
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors

Démonstration. Soient donc $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k = 0.$$

Comme la somme $\bigoplus E_{\lambda_k}(f)$ est directe, et que $\mu_i x_i \in E_{\lambda_i}(f)$,

Comme on a choisit des vecteurs propres, donc non nuls, on obtient bien $\mu_i = 0$. □

Ceci nous donne un premier critère de diagonalisabilité :

Proposition 7.3.3
Si un endomorphisme f admet n valeurs propres distinctes, alors

Plus précisement, une base dans laquelle la matrice de f est diagonale est consituée de vecteurs propres pour chaque valeur propre.

Démonstration. On a donc, d'après le résultat précédent, une famille libre de n vecteurs propres, et donc une base de E. □

Plus généralement on utilisera le théorème suivant :

Théorème 7.3.4
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors sont équivalentes :

(i) f *est diagonalisable*

(ii)

(iii)

(iv)

Démonstration. On va faire une preuve cyclique.

- *(i) ⇒ (ii) :* Soit donc $\mathcal{B}$ une base dans laquelle la matrice D de f est diagonale.

  Alors les valeurs propres de f sont exactement
  , et la dimension de $E_\lambda(f)$ est exactement

  Comme D a n coefficients diagonaux, on en tire donc

- *(ii) ⇒ (iii) :* On sait déjà que la somme des sous-espaces propres de f est directe, et que
$$\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f)\right) =$$
Cette somme directe est donc de même dimension que E, et donc égale à E.

- *(iii) ⇒ (iv) :* Soient $\mathcal{B}_\lambda$ des bases de tous les $E_\lambda(f)$. Alors, comme la somme est directe, la concaténation de toutes les bases $\mathcal{B}_\lambda$ donne

- *(iv) ⇒ (i) :* Soit donc $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base de vecteurs propres : Alors
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
et donc

□

Méthode de diagonalisation Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'on veut, si possible, diagonaliser. Les étapes à suivre sont donc :

- Déterminer les valeurs propres de A (par la méthode du pivot, ou par un polynôme annulateur).
- Chercher la dimension de chacun des sous-espaces propres.
- Si la somme des dimensions vaut n, alors la matrice est diagonalisable. Sinon, elle ne l'est pas.

On se place dans le cas où la matrice est diagonalisable.

- On cherche une base de chacun des sous-espace propres.
- On concatène toutes ces bases pour en former une de E, notée $\mathcal{B}$. Alors, si $P = P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$, on a bien
$$A = PDP^{-1}$$
où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, répétées autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé.

EXEMPLE

On veut étudier la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- On cherche les valeurs propres de A. On échelonne donc la matrice $A - \lambda I_3$:

- On cherche donc une base de chacun des sous-espaces propres, qui sont tous de dimension 1 : il suffit de trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre.
  - $\lambda = 1$: on a déjà échelonné la matrice $A - 1I_3$. Le système à résoudre est donc

    On trouve alors par exemple $(x, y, z) = \qquad = e_1$.
  - $\lambda = 2$: le système à résoudre est

    On trouve par exemple $(x, y, z) = \qquad = e_2$.
  - $\lambda = 3$: le système à résoudre est

    On trouve par exemple $(x, y, z) = \qquad = e_3$.
- La famille (e_1, e_2, e_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$, et en posant

  $$P = \qquad \text{et } D =$$

  on a la relation

7.4 Applications de la diagonalisation

On a déjà vu dans les chapitres précédent à quoi servait une matrice simple :

Calcul de puissances et d'inverses

On a le résultat suivant :

Proposition 7.4.1
Si $A = PDP^{-1}$ avec P inversible, alors pour tout entier n,

$$A^n =$$

Si A est inversible, alors D aussi, et

$$A^{-1} =$$

Si D est simple, par exemple diagonale, il est simple de calculer sa puissance n-ième. On ramène donc un calcul de puissance à seulement deux produits matriciels.

Étude de suites récurrentes linéaires

On considère une suite récurrente définie par $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{K}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= au_n + bv_n + cw_n \\ v_{n+1} &= du_n + ev_n + fw_n \\ w_{n+1} &= gu_n + hv_n + iw_n \end{cases}$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{K}$. Alors, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a la relation

$$X_{n+1} =$$

On a alors, par une récurrence immédiate

Proposition 7.4.2
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n =$.

NOTA

C'est en particulier utile pour les suites définies par récurrence à plusieurs termes, par exemple

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On applique alors la méthode précédente en posant $v_n = u_{n+1}$, pour obtenir

$$\begin{cases} u_{n+1} &= v_n \\ v_{n+1} &= bu_n + av_n \end{cases}$$

et donc en utilisant la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$

Similitude de matrices

On a vu que deux matrices semblables ont même rang, même trace, même valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension, mais que la réciproque était fausse.

En revanche, si les matrices sont diagonalisables, alors

Proposition 7.4.3
Si A et B sont diagonalisables, alors A et B sont semblables si et seulement si

Démonstration. On a déjà vu le sens direct.

Pour le sens réciproque, si elles sont diagonalisables, elles seront toutes les deux semblables à la même matrice diagonale. Par transitivité de la similitude, A et B seront bien semblables.

$\square$

7.5 Exercices

Exercice 1. Diagonaliser, si possible, les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endormorphisme n'ayant qu'une seule valeur propre soit diagonalisable.

Exercice 3. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

(i) Montrer que 0 est valeur propre de J, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

(ii) Trouver une valeur propre non nulle de J, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

(iii) Montrer que J est diagonalisable, et donner une matrice diagonale à laquelle J est semblable.

Exercice 4. Soit f un endomorphisme de rang 1. Montrer que $f - \mathrm{id}$ ou $f + \mathrm{id}$ est diagonalisable.

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit λ une valeur propre non nulle de f. Montrer que

$$E_\lambda(f) \subseteq \mathrm{Im}(f).$$

Exercice 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B, vues comme matrices réelles, ont même rang, même trace et même spectre.

Qu'en est-il si on les voit comme matrices complexes ?

A et B sont-elles semblables ?

Exercice 7. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = P - (X+1)P'$.

(i) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

(ii) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 8. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + \mathrm{Tr}(M) I_n \end{array}$. f est-il diagonalisable ?

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que tout vecteur de E non nul soit vecteur propre de f. Pour un tel x, on note λ_x la valeur propre associée : $f(x) = \lambda_x x$.

(i) Montrer que si $x, y \in E$ sont libres, alors $\lambda_x = \lambda_y$.

(ii) Montrer que si $x, y \in E$ sont liés, alors $\lambda_x = \lambda_y$.

(iii) En déduire que f est une homothétie.

Exercice 10. Soient $,b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \cdots & b \\ b & a & b & a & \cdots & a \\ a & b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & a & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

(i) Calculer le rang de A. En déduire que $0 \in \mathrm{Spec}(A)$, et la dimension de $E_0(A)$.

(ii) Trouver deux vecteurs propres de A non colinéaires, associés à des valeurs propres non nulles.

(iii) Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 11. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, B diagonalisable. Montrer que si A et B^3 commutent, alors A et B aussi.

Exercice 12. (i) Montrer que si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutente, alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

(ii) En déduire que si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, alors u et v ont un vecteur propre commun.

Exercice 13. Soit D l'endomorphisme sur $\mathbb{R}[X]$ défini par $D(P) = P'$. On suppose qu'on peut trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ Δ tel que $D = \Delta^2$.

(i) Montrer que D et Δ commutent.

(ii) Montrer que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par Δ et par D.

(iii) Donner les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ des endomorphismes induits par Δ et D.

(iv) Conclure que l'existence de Δ est impossible.