Chapitre 8

Variables aléatoires à densité

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.

8.1 Généralités et rappels sur les variables aléatoires réelles à densité

8.1.1 Fonction de répartition

Définition 8.1.1
On appelle fonction de répartition *d'une variable aléatoire réelle X la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) =$$

On sait que la fonction de répartition d'une variable aléatoire caractérise sa loi.

Proposition 8.1.2
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors F est une fonction de répartition si et seulement si

-
- *F est continue à droite,* i.e.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) =$ *et* $\lim_{x \to \infty} F(x) =$.

8.1.2 Densité

Définition 8.1.3
Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que X est une variable aléatoire à densité *si sa fonction de répartition F_X est*

•

•

On appelle alors densité de X *toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive ou nulle, telle que $f = F_X'$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points. On la note souvent f_X.*

NOTA

On note qu'une variable aléatoire discrète a une fonction de répartition discontinue. Les variables aléatoires discrètes ne sont donc pas à densité.

NOTA

Une variable aléatoire à densité peut donc admettre plusieurs densité. La différence n'étant que sur un nombre fini de points, on s'autorisera à parler de *la* densité d'une variable.

Proposition 8.1.4
La densité caractérise la loi d'une variable, i.e. *si X et Y sont des variables à densité f_X et f_Y, alors elles ont même loi si et seulement si — sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

La densité nous apprend plusieurs choses sur les probabilités :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) = 0$. On dit qu'une variable à densité *ne charge pas les points*. En particulier :
  - $P(X \leqslant x) = P(X < x)$ et $P(X \geqslant x) = P(X > x)$
  - $P(x \leqslant X \leqslant y) = P(x < X \leqslant Y) = P(x \leqslant X < y) = P(x < X < y)$
- Pour tout point x pour lequel $f_X(x) = F_X'(x) \neq 0$, on a

$$P(x < X < x + h) \underset{h \to 0}{\sim}$$

Autrement dit, la probabilité que X soit proche de X est proportionnelle à $f_X(x)$.

Proposition 8.1.5
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors f est la densité d'une variable aléatoire si et seulement si

-

-

-

On peut alors calculer des probabilités :

Proposition 8.1.6
Soit X une variable aléatoire de densité f_X. Alors

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},\ P(a < X < b) =$$

En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) =$$

8.1.3 Fonction d'une variable à densité.

On sait que si g est une fonction continue et X une variable aléatoire réelle, alors $g(X)$ reste une variable aléatoire réelle.

En revanche, si X est une fonction à densité, $g(X)$ ne l'est pas forcément.

EXERCICE

Imaginer un exemple de fonction g telle que quelque soit la variable à densité X, $g(X)$ ne soit pas à densité.

La méthode générale pour le vérifier consiste à chercher la fonction de répartition de $g(X)$ en fonction de F_X, et vérifier qu'elle est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Proposition 8.1.7
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Alors si X est une variable aléatoire à densité, $g(X) = aX + b$ aussi, et la densité de $g(X)$ est

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{g(X)}(x) = \qquad\qquad .$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc, si $a > 0$

$$\begin{aligned} F_{g(X)}(x) &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$F_{g(X)}$ est donc bien une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points, car F_X l'est.

On a de plus $f_{g(X)}(x) = \qquad = \qquad .$

Si $a < 0$, on fait un raisonnement analogue.

□

EXERCICE

Étudier X^2 quand X est une variable aléatoire à densité.

On a en fait le théorème suivant, hors-programme :

Théorème 8.1.8
Soit X une variable aléatoire de densité f. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi' > 0$ — sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors $\varphi : \mathbb{R} \to \varphi(\mathbb{R})$ est bijective, et $\varphi(X)$ est une variable aléatoire à densité, de densité

$$f_{\varphi(X)} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (\varphi^{-1})'(x) f_X(\varphi^{-1}(x)) & \text{si } x \in \varphi(\mathbb{R}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Démonstration. On a $P(\varphi(X) \leqslant x) = P(X \leqslant \varphi^{-1}(x)) = F_X(\varphi^{-1}(x))$, donc $\varphi(X)$ est à densité, et la formule de dérivation d'une composée nous donne le résultat. □

NOTA

Le résultat reste vrai si $\varphi' < 0$. Dans ce cas, il faut rajouter une signe $-$ à la densité.

8.2 Moments d'une variable aléatoire à densité

Définition 8.2.1
Soit X une variable aléatoire de densité f, et soit $r \in \mathbb{N}^*$. Alors on dit que X admet un moment d'ordre r si l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de $t^r f(t)$ converge absolument. On note alors

$$m_r(X) =$$

On dit que X admet une espérance si elle admet un moment d'ordre 1.

EXEMPLE

Soit X de densité

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Alors X admet un moment de tout ordre, et

$$m_r(X) = \qquad = \qquad =$$

NOTA

On remarque que, comme $t^r f(t)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$, on peut se contenter de montrer la convergence, qui implique la convergence absolue.

Proposition 8.2.2
Soit X une variable à densité. Soient $q, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $q \leqslant r$. Alors si X admet un moment d'ordre r, alors X admet une moment d'ordre q.

On a alors, comme pour les variables discrètes :

Théorème 8.2.3 : de transfert
Soit X une variable aléatoire à densité, qui prend ses valeurs dans l'intervalle I d'extrémités $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue — sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors $\varphi(X)$ est une variable aléatoire, qui admet une espérance si et seulement si

Dans ce cas, on a

$$E(\varphi(X)) =$$

Démonstration. On ne fait la preuve que dans le cas $a = -\infty$, $b = \infty$ et φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\varphi' > 0$.

On a déjà vu que $\varphi(X)$ est une variable à densité, de densité

$$f_{\varphi(X)}(x) =$$

Donc $\varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

converge absolument, *i.e.* si

converge.

En faisant le changement de variable $x = \varphi(t)$, on se ramène à la convergence de

et on retrouve le résultat cherché. □

Corollaire 8.2.4
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, si une variable à densité X admet une espérance, alors $aX + b$ aussi, et

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Corollaire 8.2.5
X admet un moment d'ordre r si et seulement si X^r admet une espérance.

8.2.1 Espérance

Proposition 8.2.6 : Linéarité de l'espérance
Soient X et Y à densité, et $a, b \in \mathbb{R}$. Si X et Y admettent une espérance, alors $aX + bY$ aussi, et

Proposition 8.2.7
Soient X et Y deux variables à densité. Si $|X| \leqslant Y$ presque sûrement et que Y admet une espérance, alors X admet une espérance et

Proposition 8.2.8 : Positivité et croissance de l'espérance
Soient X et Y deux variables à densité qui admettent une espérance.

- *Si $X \geqslant 0$ presque sûrement, alors*
- *Si $X \leqslant Y$ presque sûrement, alors*

Proposition 8.2.9
Soient X et Y deux variables à densité admettant une espérance. Alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et

$$E(aX + bY) =$$

Si de plus X et Y sont indépendantes, alors XY admet une espérance et

$$E(XY) =$$

Proposition 8.2.10
Soient X une variable à densité, et $q \leqslant r \in \mathbb{N}^*$. Alors si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre q.

Démonstration. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, , donc

Comme $1 + |X|^r$ admet une espérance, $|X|^q$ aussi. □

En particulier, une variable aléatoire à densité qui admet un moment d'ordre 2 admet une espérance.

8.2.2 Variance

Définition 8.2.11
Soit X une variable aléatoire de densité f admettant une espérance. On suppose que $(X - E(X))^2$ admet aussi une espérance.

On appelle alors variance[*] *de X le réel*

$$V(X) = \qquad =$$

*. Parfois, *moment centré d'ordre 2*

Définition 8.2.12
Si X admet une variance, alors on appelle écart-type *de X le réel $\sigma(X) =$.*

On a alors toujours la formule de Kœnig-Hyugens :

Proposition 8.2.13 : Formule de Kœnig-Hyugens
Une variable aléatoire à densité X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2. Dans ce cas,

$$V(X) =$$

Démonstration. Calculons : $(X - E(X))^2 =$.

- Si X admet une variance, alors
  Comme X admet une espérance, on en déduit que X^2 admet une espérance.
- Si X admet un moment d'ordre 2, alors
  Finalement, $X^2 - 2XE(X) + E(X)^2$ admet une espérance.

Dans ce cas, il suffit d'utiliser la linéarite de l'espérance pour trouver la formule. □

Proposition 8.2.14
Soient X une variable aléatoire à densité, et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $aX + b$ admet une variance, et

$$V(aX + b) =$$

Proposition 8.2.15
Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une variance. Si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ admet une variance et

$$V(X + Y) =$$

8.2.3 Variables centrées, réduites

Définition 8.2.16
Soit X une variable aléatoire à densité. On dit que

- *X est* centrée *si*
- *X est* centrée réduite *si*

On peut alors toujours construire des variables centrées ou centrées réduites :

Proposition 8.2.17
Soit X une variable aléatoire.

- *Si X admet une espérance, alors*
- *Si X admet un moment d'ordre 2, alors*

X^* s'appelle la variable centrée réduite associée à *X.*

8.3 Lois à densité usuelles

Il faut connaître quelques lois usuelles [†]

8.3.1 Lois uniformes continues

Comme pour les variables discrètes, on peut définir des lois uniformes à densité, ou lois uniformes continues.

Définition 8.3.1
On dit que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ *si X admet pour densité la fonction*

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.

NOTA

On remarquera que les lois $\mathcal{U}([a,b])$, $\mathcal{U}(]a,b[)$, $\mathcal{U}([a,b[)$ et $\mathcal{U}(]a,b])$ sont en fait identiques, puisque les densités ne diffèrent qu'en un ou deux points.

Proposition 8.3.2
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. La fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(x) =$$

†. Attention, d'autres lois peuvent apparaître dans les sujets de concours

On peut en fait toujours se ramener à une loi uniforme sur l'intevalle $[0,1]$:

Proposition 8.3.3
Soit X une variable aléatoire à densité, et soient $a < b$ deux réels. Alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b]) \Leftrightarrow$$

Proposition 8.3.4 : Espérance et variance
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$. Alors X admet une espérance et une variance ‡*, et*

$$E(X) = \qquad\qquad \text{et } V(X) =$$

8.3.2 Lois exponentielles

Définition 8.3.5
Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ *si elle admet pour densité la fonction*

On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Proposition 8.3.6
La fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par

Proposition 8.3.7 : Espérance et variance
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Alors X admet une espérance et une variance §*, et*

$$E(X) = \qquad \text{et } V(X) =$$

On peut toujours se ramener à une loi exponentielle de paramètre 1 :

Proposition 8.3.8
Soit $\lambda > 0$. Alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow$$

‡. En fait, un moment de tout ordre
§. En fait, un moment de tout ordre

La loi exponentielle est une loi sans mémoire, c'est-à-dire que $P(X \geqslant x) > 0$ pour tout x, et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ P_{(X \geqslant x)}(X \geqslant x+y) = P(X \geqslant y).$$

Autrement dit, une loi sans mémoire "oublie" ce qui s'est passé avant.

Plus précisémment

Théorème 8.3.9
Soit X une variable à densité telle que pour tout $x \geqslant 0$, $P(X \geqslant x) > 0$. Alors X est une loi sans mémoire si et seulement si X suit une loi exponentielle.

8.3.3 Lois Gammas

Définition 8.3.10
Soit $\nu > 0$. On dit que X suit une loi Gamma de paramètre ν si elle admet pour densité la fonction

On note $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$.

Proposition 8.3.11
La fonction de répartition de la loi Gamma de paramètre $\nu > 0$ est donnée par

Proposition 8.3.12 : Espérance et variance
Soit $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$. Alors X admet une espérance et une variance¶, et

$$E(X) = \qquad \text{et } V(X) =$$

8.3.4 Lois normales

Définition 8.3.13
Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit qu'une variable aléatoire suit la loi normale de paramètres μ

¶. En fait, un moment de tout ordre

et σ^2 si elle admet pour densité la fonction

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

NOTA

On utilisera beaucoup la *loi normale centrée réduite*, *i.e.* la loi normale de paramètres 0 et 1. Sa densité est donc

Proposition 8.3.14
La fonction de répartition d'une loi normale de paramètres μ et σ^2 est donnée par

NOTA

On ne peut pas donne une fonction de répartition plus simple. En effet, le théorème de Liouville-Rosenlicht prouve qu'on ne peut pas calculer de primitive de $e^{-x^2/2}$ avec des fonctions élémentaires.

Définition 8.3.15
On note Φ la fonction de réparition de la loi normale centrée réduite :

$$\Phi(x) =$$

EXERCICE

À l'aide d'un changement de variables affine, retrouver la fonction de répartition d'une loi normale quelconque en fonction de Φ.

Proposition 8.3.16
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(-x) =$. En particulier $\Phi(0) =$.

Démonstration. Par parité de la fonction $e^{-t^2/2}$, on note que

$$\Phi(-x) =$$

$$=$$

$$=$$

□

Comme précédemment, on peut toujours se ramener à une loi simple :

Proposition 8.3.17
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Alors

$$aX + b \hookrightarrow$$

En particulier, on a

$$\frac{1}{\sigma}(X - \mu) \hookrightarrow$$

Proposition 8.3.18
Si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors Z est centrée réduite, i.e.

$$E(Z) = \quad \text{et } V(Z) = \quad .$$

Onn en déduit que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$E(X) = \quad \text{et } V(X) =$$

Démonstration. La fonction $te^{-t^2/2}$ est une fonction , continue sur $\mathbb{R}$, et $te^{-t^2/2} = o(t^{-2})$ au voisinage de $\pm\infty$. Donc Z admet une espérance, qui est nulle.

Pour la même raison, X admet un moment d'ordre 2. Calculons l'intégrale à l'aide d'une intégration par parties. Soit donc $A > 0$.

$$\int_0^A t^2 e^{-t^2/2} \mathrm{d}t =$$

$$\xrightarrow{A \to \infty}$$

Par parité, on en déduit donc que $E(X^2) =$. On en déduit la variance par la formule de Hyugens. □

8.4 Somme de variables aléatoires à densité

Dans cette partie, on suppose que X et Y sont deux variables aléatoires à densité. On note f (resp. g) une densité de X (resp. Y).

Théorème 8.4.1
On suppose que X et Y sont indépendantes, et que f ou g est bornée.

Alors la fonction $f * g$ définie par

$$f * g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \end{array}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

$f * g$ s'appelle le produit de convolution *de f et g.*

NOTA

On note que par le changement de variable $u = x - t$, on prouve que

Théorème 8.4.2
On suppose que X et Y sont indépendantes, et que f ou g est bornée. Alors

EXERCICE

Soient $X, Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

On a alors deux résultats de stabilité importants :

Théorème 8.4.3 : Stabilité des lois γ
On suppose que $X \hookrightarrow \Gamma(\nu)$ et $Y \hookrightarrow \Gamma(\kappa)$ et qu'elles sont indépendantes. Alors

Démonstration. On admet[‖] que le produit de convolution $f * g$ existe, est continu sauf en 0 et est une densité de $X + Y$.

On note que $f(t)g(x - t)$ est nulle quand *i.e.* quand

‖. La loi γ est la seule loi usuelle qui a une densité non bornée.

Donc

$$(f * g)(x) =$$

$$=$$

$$=$$

On fait le changement de variable $u = \frac{t}{x}$:

$$\frac{x^{\kappa-1}e^{-x}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\kappa)} \int_0^x t^{\nu-1}(1 - \frac{t}{x})^{\kappa-1}\mathrm{d}t =$$

$$=$$

On souhaite maintenant calculer A. Comme $f * g$ est une densité, on sait que son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1, et on en déduit :

d'où $A = \frac{1}{\Gamma(\nu+\kappa)}$.

$f * g$ est donc bien la densité d'une loi $\gamma(\nu + \kappa)$.

□

Théorème 8.4.4 : Stabilité des lois normales
Soient X et Y deux variables indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m, s^2)$ et $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Alors $X + Y$ suit une loi normale de paramètres

8.5 Exercices

Exercice 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\lambda}{1+t^2} \end{array}$$

(i) Trouver la valeur de λ pour que f soit une densité.
La loi qui correspond à cette densité s'appelle loi de Cauchy.

(ii) Donner la fonction de répartition d'une loi de Cauchy.

(iii) Soit X suivant une loi de Cauchy. Calculer $P(-1 < X < 1)$ et $P(X > 1)$. En déduire $P(X < -1)$.

(iv) Montrer que X admet une espérance, une variance, et les calculer.

Exercice 2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-2, 1])$.

(i) Montrer que la variable aléatoire $Z = X^2$ admet une espérance et une variance, et les calculer.

(ii) Déterminer une densité de Z, et retrouver la valeur de $E(Z)$.

Exercice 3. a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $x, y \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

b) Soient $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ indépendantes.

(i) Déterminer une densité de X^2.

(ii) Déterminer une densité de $-Y$.

(iii) En déduire que $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

c) Déterminer la probabilité que la matrice aléatoire $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, et soit $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$.

Exercice 5. Soit $a > 0$. On définit la fonction

$$f_a : t \mapsto \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \in [1, \infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(i) Montrer que f_a est une densité.

(ii) Soit X une variable aléatoire de densité f_a. Déterminer la fonction de répartition de X.

(iii) Étudier l'existence de l'espérance et de la variance de X, et les calculer le cas échéant.

(iv) Déterminer la fonction de répartition de $Y = \ln X$.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour quel $a \in \mathbb{R}^+$ qui rende la quantité $P(a \leqslant X \leqslant na)$ maximale ?

Exercice 7. Déterminer la loi de la somme d'une loi uniforme sur $[0,1]$ et d'une loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 8. Montrer qu'une loi exponentielle de paramètre λ admet des moments de tout ordre, et les calculer.

Exercice 9. Pour une variable aléatoire X de densité f, on appelle *entropie* de X la quantité suivante, si elle existe

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln(f(x))\mathrm{d}x.$$

(i) Calculer l'entropie d'une loi uniforme sur $[a,b]$.

(ii) Montrer que l'entropie d'une loi $\mathcal{N}(m,s^2)$ est

$$h(X) = \frac{1}{2}(1+\ln(2\pi s^2)).$$

(iii) Soit Y une variable de densité f, centrée et de variance s^2, admettant une entropie. On note φ la densité de $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, et on suppose que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln\left(\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x$ converge.
Montrer que pour tout x, $f(x)\ln(\varphi(x)) \leqslant f(x)\ln(f(x)) + \varphi(x) - f(x)$.

(iv) En déduire que

$$h(Y) \leqslant -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln(\varphi(x))\mathrm{d}x$$

(v) Montrer que $h(Y) \leqslant \frac{1}{2}(1+\ln(2\pi s^2))$.
Les lois normales sont donc les lois d'entropie maximale.

Exercice 10. Soient $X, Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ indépendantes. On cherche la loi de $Z = \frac{X}{X+Y}$. On note F_Z la fonction de répartition de Z.

(i) Calculer $P(X > 0 \cap Y > 0)$.

(ii) Montrer que Z est bien définie.

On fixe $t \in]0,1[$. On pose $U = (t-1)X$, $V = tY$ et $W = U + V$.

c) Montrer que $F_Z(t) = P(W \geqslant 0)$.

d) Déterminer les densités de U et V, puis de W.

e) En déduire la loi de Z.