Chapitre 9

Produits scalaires

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel réel fixé.

9.1 Produits scalaires et normes

9.1.1 Définition des produits scalaires

Définition 9.1.1
Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est une forme bilinéaire si :

- $\forall y \in E,\ x \mapsto \varphi(x, y)$ *est linéaire,* i.e.

- $\forall x \in E,\ y \mapsto \varphi(x, y)$ *est linéaire,* i.e.

Une fonction qui vérifie le premier point est dite linéaire à gauche*, et une fonction qui vérifie le second point est dite* linéaire à droite.

EXEMPLE

L'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y), (u, v) & \longmapsto & xu + yx \end{array}$$

est bilinéaire. En effet, soient $(x, y), (u, v)(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On a

$$\begin{aligned}\varphi((x,y)+\lambda(a,b),(u,v)) &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Définition 9.1.2
Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On dit que φ est symétrique *si*

EXEMPLE

L'application définie précédemment est symétrique.

NOTA

Pour montrer qu'une application est une forme bilinéaire symétrique, il n'y a besoin de montrer que la linéarité à gauche ou à droite, et la symétrie prouvera la linéarité par rapport à l'autre variable.

Les formes bilinéaires symétriques se comportent comme des produits :

Proposition 9.1.3
Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Alors :

- $\forall x \in E,\ \varphi(x,0) = \varphi(0,x) =$
- $\forall x,y \in E,\ \varphi(x+y,x+y) =$.

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire, donc envoie 0 sur 0.

Si $x,y \in E$, alors :

$$\begin{aligned}\varphi(x+y,x+y) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

□

Définition 9.1.4 : Produit scalaire
Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$. On dit que φ est un produit scalaire sur *E si*

- *φ est*
- *φ est*
- *φ est définie positive,* i.e.

Les notations usuelles pour les produits scalaires sont $\langle x, y\rangle$, $(x \mid y)$, $x \cdot y$.

EXEMPLE

L'application des exemples précédents est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. En effet, on a déjà vu qu'elle était bilinéaire symétrique, et si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi((x,y),(x,y)) =$$

avec égalité si et seulement si

9.1.2 Exemples fondamentaux de produits scalaires

Proposition 9.1.5
Soit $n \in \mathbb{N}$. L'appllication $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle =$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé produit scalaire canonique.

NOTA

On remarque que dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, on retrouve le produit scalaire usuel dans le plan et dans l'espace.

Démonstration. Montrons que l'application est linéaire à gauche : soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\langle x + \lambda y, z\rangle &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Montrons maintenant qu'elle est symétrique : soient $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle x, y \rangle =$$

$$=$$

$$=$$

Montrons qu'elle est définie positive : soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle x, x \rangle =$$

avec égalité si et seulement si

□

Proposition 9.1.6
L'application $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\langle f, g \rangle =$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$*, appelé* produit scalaire canonique.

NOTA

C'est aussi un produit scalaire si on change le *segment* de départ, ou si on le restreint au fonctions $\mathcal{C}^1$, aux polynômes, *etc.*

Démonstration. La bilinéarité vient directement de la linéairité de l'intégrale, et la symétrie vient de la symétrie du produit sur $\mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On a

$$\langle f, f \rangle =$$

Par positivité de l'intégrale $\langle f, f \rangle \geqslant 0$, et par cas de nullité de l'intégrale d'une fonction positive, si $\langle f, f \rangle = 0$, alors $f^2 = 0$, *i.e.* $f = 0$. □

Proposition 9.1.7
L'application $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\langle A, B \rangle =$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$*, appelé* produit scalaire canonique.

Démonstration. On montre les trois points :

- Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

  $\langle A + \lambda B, C \rangle =$
  $=$
  $=$

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Alors

  $\langle A, B \rangle =$
  $=$
  $=$

- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Alors on a vu en exercice que

  $$\langle A, A \rangle = \mathrm{Tr}({}^{\mathbf{t}}AA) =$$

  Donc $\langle A, A \rangle \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si tous les coefficients de la matrice sont nuls, *i.e.* $A = 0$.

$\square$

On a en particulier défini un produit scalaire sur les matrices colonnes par

$$\langle X, Y \rangle = {}^{\mathbf{t}}XY = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

9.1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 9.1.8 : Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E. Alors

$$\forall x, y \in E,$$

De manière équivalente,

$$\forall x, y \in E,$$

De plus, on a égalité si et seulement si

NOTA

On remarque que ce résultat ressemble à celui du même nom vu pour la covariance. On va en effet faire une démonstration très similaire.

Démonstration. Si x ou y est nul, le résultat est trivial. Supposons donc $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) =$$

Par positivité du produit scalaire, on a bien $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant 0$, et par bilinéarité, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) =$$

f est donc qui est toujours positif ; :

On retrouve l'inégalité cherchée.

Supposons maintenant qu'on a l'égalité. Le trinôme f a donc un unique racine ; on la note a. Mais alors $f(a) =$, et donc $ax + y = 0$. Donc x et y sont colinéaires.

Inversement, si x et y sont colinéaires, on peut écrire par exemple $x = \lambda y$. Dans ce cas

$$\varphi(x, y)^2 =$$

□

EXERCICE

Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas des produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

9.1.4 Norme associée à un produit scalaire

Dans cette partie, on suppose qu'on a un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E.

Définition 9.1.9
La norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *est l'application*

$$\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \end{array} .$$

Corollaire 9.1.10 : Inégalité de Cauchy-Schwarz
L'inégalité de Cauchy-Schwarz se réécrit donc

$$\forall x, y \in E,$$

EXEMPLE

La norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ est bien la norme euclidienne usuelle dans le plan :

$$\|(x,y)\| =$$

Proposition 9.1.11
Soit $x \in E$. Alors

-
-

Démonstration. Ces deux propriétés viennent directement de celles du produit scalaire :

$$\|\lambda x\| =$$

Si $x = 0$, il est clair que $\|x\| = 0$. Si $\|x\| = 0$, alors $\langle x, x\rangle = 0$, et donc $x = 0$. □

Proposition 9.1.12 : Inégalité triangulaire
Soient $x, y \in E$. Alors

$$\|x+y\|$$

Démonstration. Tous les termes sont positifs, et on compare donc plutôt les carrés.

$$\|x+y\|^2 =$$
$$=$$
$$=$$

□

Définition 9.1.13
On dit qu'un vecteur $x \in E$ est unitaire s'il est de norme 1.

Si $x \in E\backslash\{0\}$, on appelle normalisé *de x le vecteur unitaire*

9.2 Vecteurs orthogonaux

Dans cette partie, on suppose que E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 9.2.1
On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux[*] *si*

On notera $x \perp y$.

Définition 9.2.2
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont orthogonaux si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G, i.e.

On notera[†] *$F \perp G$.*

EXEMPLE

Soient $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ et $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$. Alors F et G sont orthogonaux. En effet, si $(x,x) \in F$ et $(y,-y) \in G$, alors

$$\langle (x,x), (y,-y) \rangle = xy + x(-y) = 0$$

Proposition 9.2.3
Deux vecteurs orthogonaux non nuls forment toujours

Deux sous-espaces vectoriels orthogonaux sont toujours

Démonstration. Soient $x, y \in E$ orthogonaux, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda x + \mu y = 0$. Alors en applicant l'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$ à cette égalité, on obtient

Comme et $x \neq 0$, on obtient

Soient F et G deux sous-espaces orthogonaux de E. Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $x \in G$, donc Il s'ensuit que $x = 0$. □

Définition 9.2.4
Une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs est dite orthogonale *si tous les vecteurs sont deux à*

*. dans de rares cas, perpendiculaires
†. attention, on utilise la même notation pour les vecteurs que pour les sous-espaces

deux orthogonaux, i.e.

Une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ *de vecteurs est dite* orthonormale *si elle est orthogonale, et que tous les vecteurs* x_i *sont unitaires.*

On peut généralité la proposition précédente :

Proposition 9.2.5
Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ *une famille de* n *vecteurs de* E *non nuls. Alors si* $\mathcal{F}$ *est orthogonale, alors elle est libre.*

Démonstration. Soient donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0.$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On applique à l'égalité précédente la fonction . On obtient alors par linéarité

et donc, par orthogonalité,

Comme $x_j \neq 0$, on en déduit $\lambda_j = 0$. Ceci étant vrai pour tout j, la famille $\mathcal{F}$ est donc libre. □

Théorème 9.2.6 : de Pythagore
Soient $x, y \in E$. *Alors* x *et* y *sont orthogonaux si et seulement si*

Démonstration. On a

x et y orthogonaux $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

□

NOTA

En l'appliquant à $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, on retrouve le théorème de Pythagore pour les triangles.

On peut par récurrence étendre le sens direct à plus de vecteurs :

Proposition 9.2.7 : Théorème de Pythagore
Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. *Si* $(x_1, \dots, x_n)$ *est orthogonale, alors*

Démonstration. Le cas $n = 1$ est trivial, et le cas $n = 2$ correspond au théorème précédent.

Supposons la propriété vraie pour un certain n. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ une famille orthogonale de vecteurs de E.

Alors x_{n+1} est orthogonal à $\sum_{k=1}^{n} x_k$. Donc

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} x_i \right\|^2 =$$

$$=$$

$$=$$

□

NOTA

Attention, la réciproque n'est vrai que dans le cas de deux vecteurs.

9.2.1 Orthnormalisation de Gram-Schmidt

Il existe un algorithme permettant de transformer toute famille libre finie $(x_1, \dots, x_n)$ en une famille orthonormée.

Proposition 9.2.8 : Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ *une famille libre de vecteurs de* E. *On définit une autre famille de vecteurs* $(e_1, \dots, e_n)$ *par récurrence :*

- *On pose* $e_1 =$.
- *Si les vecteurs* $e_1, \dots, e_k$ *ont été construits, on pose*
  - $\hat{e}_{k+1} =$
  - $e_{k+1} =$

Alors

Démonstration. On fait une preuve par récurrence.

- Le cas d'un seul vecteur est évident.
- Supposons donc que $(e_1, \dots, e_k)$ est orthonormée, et que $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots e_k)$. Montrons que $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est orthonormale ; on sait déjà que $e_i \perp e_j$ et $\|e_i\| = 1$ dans le cas $i, j \leqslant k$.
  - Soit $j \in [\![1, k]\!]$. Alors

$$\langle \hat{e}_{k+1}, e_j \rangle =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

  - $\|e_{k+1}\|$ est unitaire par construction.

  Montrons maitenant que $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots e_{k+1})$. Il est clair que $e_{k+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1})$ par construction, et on a donc l'implication directe.

  Or les deux familles $(x_1, \dots, x_{k+1})$ et $(e_1, \dots, e_{k+1})$ sont libres, donc les espaces vectoriels engendrés sont de même dimention $k + 1$. On a donc bien l'égalité.

□

EXEMPLE

La famille $(x_1, x_2, x_3) = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, -1))$ de vecteurs de R^3 est libre. Appliquons l'algorithme de Gram-Schmidt.

- On pose donc $e_1 =$.
- On pose ensuite $\hat{e}_2 =$ car x_2 et e_1 sont déjà orthogonaux. On pose ensuite $e_2 =$.
- Pour finir, on pose $\hat{e}_3 =$, *i.e.*

$$\hat{e}_3 =$$

  puis $e_3 =$.

La famille

est donc une famille orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE

Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ par

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.
Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

9.3 Espaces euclidiens

Définition 9.3.1
Un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire s'appelle un espace préhilbertien réel. *S'il est de plus de dimension finie, on parle alors d'*espace euclidien.

Dans toute la suite, on suppose que E est un espace euclidien de dimension n, et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont produit scalaire.

Proposition 9.3.2
E admet une base orthonormée [‡]

Démonstration. On sait déjà que E admet une base. En appliquant l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on trouve une famille libre orthonormée contenant n vecteurs, donc une base. □

Corollaire 9.3.3
Toute famille libre orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormée de E.

Les bases orthormées permettent de simplifier les calculs, de la même façon qu'on préfère faire de la géométrie plane dans des repères orthonormés.

On fixe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Proposition 9.3.4
Soient x dans E, et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sa décomposition dans la base $\mathcal{B}$. Alors pour tout i,

‡. On appelle base orthornormée toute famille orthonormée de vecteurs qui forment une base

Démonstration. Calculons :

$$\langle x, e_i \rangle =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

□

Corollaire 9.3.5
Pour tout vecteur x de E,

$$\|x\|^2 =$$

Matriciellement, on peut écrire que

- $\langle x, y \rangle =$
- $\|x\|^2 =$

On s'intéresse maintenant aux changements de bases orthonormées.

Définition 9.3.6
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale *si* *De façon équivalente, une matrice est orthogonale si elle est inversible et que son inverse est sa transposée.*

EXEMPLE

La matrice I_n est orthogonale.
La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

EXERCICE

Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Proposition 9.3.7
Soient A et B deux matrice orthogonales. Alors

-

-

Démonstration. • A est orthogonale, donc $A^{-1} = {}^{\mathbf{t}}A$. Donc ${}^{\mathbf{t}}({}^{\mathbf{t}}A)\,{}^{\mathbf{t}}A =$, donc A^{-1} est orthogonale.

- On a ${}^{\mathbf{t}}(AB)AB =$.

□

Proposition 9.3.8
Soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E. Alors $\mathcal{C}$ est orthonormée si et seulement si

Démonstration. Notons $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, et $C_1(P), \ldots, C_n(P)$ ses colonnes. $C_i(P)$ est donc, par définition de matrice de passage, les coordonnées de f_i dans la base $\mathcal{B}$.

On note que le coefficient (i, j) de ${}^{\mathbf{t}}PP$ est

Supposons $\mathcal{C}$ orthonormée. On a alors $\langle f_i, f_j \rangle$, et donc tous les coefficients de ${}^{\mathbf{t}}PP$ sont nuls, sauf ceux de la diagonale qui valent 1 : ${}^{\mathbf{t}}PP = I_n$, donc P est orthogonale.

Si P est orthogonale, alors on retrouve $\langle f_i, f_j \rangle =$, et donc $\mathcal{C}$ est orthonormée. □

9.4 Exercices

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{C}^1\Big([0,1], \mathbb{R}\Big)$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t + f(1)g(0) + f(0)g(1)$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

Exercice 2. Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 \mathrm{d}t \text{ converge} \right\}$.

(i) Montrer que E est un espace vectoriel.

(ii) Montrer que si $f, g \in E$, alors $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ converge. On note $\varphi(f,g)$ cette intégrale.

(iii) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 3. Identités de polarisation

Soit E un espace préhilbertien réel. Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

Exercice 4. Montrer que si des sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont deux à deux orthogonaux, alors ils sont en somme directe.

Exercice 5. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = (x+y+z)(x'+y'+z') + (y+z)(y'+z') + zz'.$$

(i) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

(ii) Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour ce produit scalaire.

Exercice 6. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale.

(i) Montrer que pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle MX, MY\rangle = \langle X, Y\rangle \text{ et } \|AX\| = \|X\|.$$

(ii) Montrer que la valeur absolue de la somme de tous les coefficients de M est inférieure à n.

Indication : on pourra considérer le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Soit a un vecteur normé d'un espace vectoriel euclidien E. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme

$$f_\alpha : x \mapsto x + \alpha\langle a, x\rangle a$$

(i) Préciser la composée $f_\alpha \circ f_\beta$. Quelles sont les f_α bijectives ?

(ii) Déterminer les éléments propres de f_α.

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leqslant \|X\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur l'espace des colonnes.
Établir

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|{}^{\mathrm{t}}AX\| \leqslant \|X\|$$

Exercice 9. Montrer que pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les sous-espaces $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ (l'ensemble des matrices respectivement symétriques et antisymétriques) sont orthogonaux.

Exercice 10. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à des vecteurs bien choisis, montrer que pour tout n :

$$n^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}n^2(n+1).$$

Exercice 11. Polynômes orthogonaux d'Hermite

Soit $W : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x^2/2} \end{array}$.

(i) Montrer que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t)Q(t)W(t)\mathrm{d}t$$

converge.
On note $\langle P, Q\rangle$ la valeur de cette intégrale.

(ii) Vérifier qu'on a bien défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(iii) Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$.

Exercice 12. Soit E un espace euclidien, et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, et on note S (resp. A) la matrice de f (resp. g) dans la base $\mathcal{B}$.

On suppose S symétrique et A antisymétrique.

Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\|(f+g)(x)\| = \|(f-g)(x)\|.$$