Correction du concours blanc n°1 Maths II

Partie I

1. À chaque tirage, la probabilité de tirer une boule numérotée 1 vaut $\frac{u}{b}$, et par indépendance des tirages (qui ont lieu avec remise), on en déduit que U suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{u}{b}\right)$.
De même, D suit la loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{d}{b}\right)$ et T suit la loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{t}{b}\right)$.

2. Les variables aléatoires U et D ne sont pas indépendantes, puisqu'il n'est pas possible de tirer simultanément n boules numérotées 1 et n boules numérotées 2. Plus formellement,

$$P([U = n] \cap [D = n]) = 0 \text{ et } P(U = n) \neq 0 \text{ et } P(D = n) \neq 0.$$

3. À chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule numérotée 1 ou 2 est $\frac{u+d}{b}$, et donc[1] $U + D$ suit la loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{u+d}{b}\right)$. On en déduit que

$$\boxed{E(U+D) = n\frac{u+d}{b}} \text{ et } V(U+D) = n\frac{u+d}{b}\left(1 - \frac{u+d}{b}\right) = \boxed{n\frac{(u+d)t}{b^2}}.$$

4. Nous savons que

$$V(U+D) = V(U) + V(D) + 2\mathrm{Cov}(U,D) = n\frac{u}{b}\left(1 - \frac{u}{b}\right) + n\frac{d}{b}\left(1 - \frac{d}{b}\right) + 2\mathrm{Cov}(U,D).$$

On en déduit que

$$2\mathrm{Cov}(U,D) = n\frac{(u+d)t}{b^2} - n\frac{u(d+t)}{b^2} - n\frac{d(u+t)}{b^2} = -2n\frac{ud}{b^2}$$

et donc

$$\boxed{\mathrm{Cov}(U,D) = -\frac{nud}{b^2}}.$$

5. La commande `simulation(12)` simule douze tirages dans une urne comportant au total six boules, dont une seule boule numérotée «1», deux boules numérotées «2», et par conséquent trois boules numérotées «3».
La fonction retourne un vecteur ligne `(x,y,z)` où `x` représente le nombre de boules numérotées «1», `y` représente le nombre de boules numérotées «2» et `z` représente le nombre de boules numérotées «3» obtenus au cours de ces douze tirages.

6. La probabilité $P(\{\omega\})$ est la probabilité qu'un tirage donne exactement k boules numérotées 1 (les numéros de ces tirages étant fixés à l'avance : il s'agit des indices i tels que $x_i = 1$), ℓ tirages numérotés 2 et donc $n - k - \ell$ tirages numérotés 3.
Or, lors du i-ème tirage, la probabilité d'avoir une boule numérotée 1 est $\dfrac{u}{b}$, celle d'obtenir une boule numérotée 2 est $\dfrac{d}{b}$, etc.
Par indépendance des tirages, on en déduit que

$$P(\{\omega\}) = \left(\frac{u}{b}\right)^k \left(\frac{d}{b}\right)^\ell \left(\frac{t}{b}\right)^{n-k-\ell} = \boxed{\frac{u^k d^\ell t^{n-k-\ell}}{b^n}}.$$

Dénombrons les n-uplets de Ω contenant exactement k «1» et ℓ «2».
Pour se fixer un tel n-uplet, on peut commencer par fixer les places des k «1», et il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir ces places.
Puis, une fois fixé l'emplacement des «1», il s'agit de choisir où se situeront les «2» parmi les $n - k$ emplacements disponibles : il y a $\binom{n-k}{\ell}$ manières de choisir ces emplacements.
Ainsi, le nombre total de tels n-uplets est

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{\ell!(n-k-\ell)!} = \frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!} = \boxed{\binom{n}{k,\ell}}.$$

Enfin, remarquons que l'événement $[U = k] \cap [D = \ell]$ est la réunion des $\binom{n}{k,\ell}$ événements élémentaires $\{\omega\}$, où ω est un n-uplet comportant exactement k «1» et ℓ «2». Ces événements étant deux à deux incompatibles, et de probabilité $\dfrac{u^k d^\ell t^{n-k-\ell}}{b^n}$, on en déduit que

$$\boxed{P([U = k] \cap [D = \ell]) = \binom{n}{k,\ell} \frac{u^k d^\ell t^{n-k-\ell}}{b^n}.}$$

De plus, ce résultat reste vrai pour $k + \ell > n$, car alors $\binom{n}{k,\ell} = 0$ par définition, et que les événements $[U = k] \cap [D = \ell]$ sont incompatibles[2].

Partie II : lois marginales d'un couple aléatoire de loi trinomiale

7. Notons que $(k,\ell) \in I_n$ si et seulement si $\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \leqslant \ell \leqslant n-k \end{cases}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{(k,\ell)\in I_n} \binom{n}{k,\ell} p^k q^\ell r^{n-k-\ell} &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!} p^k q^\ell r^{n-k-\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{\ell!(n-k-\ell)!} q^\ell r^{n-k-\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} q^\ell r^{n-k-\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (q+r)^{n-k} \\
&= (p + (q+r))^n = 1^n = \boxed{1.}
\end{aligned}$$

8. Puisque la variable aléatoire Y_n prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$, $\{[Y_n = \ell], \ell \in [\![0,n]\!]\}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, pour $k \in [\![0,n]\!]$, par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \sum_{\ell=0}^{n} P([X_n = k] \cap [Y_n = \ell]) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-k} P([X_n = k] \cap [Y_n = \ell]) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!} p^k q^\ell r^{n-k-\ell} \\
&= \binom{n}{k} p^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} q^\ell r^{n-k-\ell} \\
&= \binom{n}{k} p^k (q+r)^{n-k} \\
&= \boxed{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{X_n \text{ suit la loi binomiale } \mathscr{B}(n,p).}$ On montrerait de même que Y_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,q)$.

9.a. Soit $(k,\ell) \in I_n$ avec $k \geqslant 1, \ell \geqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned}
k\ell \binom{n}{k,\ell} = k\ell \frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!} &= \frac{n!}{(k-1)!(\ell-1)!(n-k-\ell)!} \\
&= n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!((n-2)-(k-1)-(\ell-1))!} = n(n-1)\binom{n}{k,\ell}.
\end{aligned}$$

L'existence de $E(X_nY_n)$ est claire car X_n et Y_n sont deux variables aléatoires finies, donc il en est de même de X_nY_n, qui admet donc une espérance.
Par le théorème de transfert (appliqué à la fonction $(x,y)\mapsto xy$), on a

$$\begin{aligned}
E(X_nY_n) &= \sum_{(k,\ell)\in I_n} k\ell P([X_n=k]\cap[Y_n=\ell])\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n-k} k\ell\binom{n}{k,\ell}p^kq^\ell r^{n-k-\ell}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-k} k\ell\binom{n}{k,\ell}p^kq^\ell r^{n-k-\ell}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-k} n(n-1)\binom{n-2}{k-1,\ell-1}p^kq^\ell r^{n-k-\ell}\\
&= n(n-1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-k}\frac{(n-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!(n-k-\ell)!}p^kq^\ell r^{n-k-\ell}\\
&= n(n-1)\sum_{k'=0}^{n-2}\sum_{\ell'=0}^{n-k'-2}\frac{(n-2)!}{k'!\ell'!(n-2-k'-\ell')!}p^{k'+1}q^{\ell'+1}r^{n-2-k'-\ell'}\\
&= n(n-1)pq\sum_{k'=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k'!(n-2-k')!}p^{k'}\sum_{\ell'=0}^{n-2-k'}\frac{(n-2-k')!}{\ell'!(n-2-k'-\ell')!}q^{\ell'}r^{n-2-k'-\ell'}\\
&= n(n-1)pq\sum_{k'=0}^{n-2}\binom{n-2}{k'}p^{k'}\sum_{\ell'=0}^{n-2-k'}\binom{n-2-k'}{\ell'}q^{\ell'}r^{n-2-k'-\ell'}\\
&= n(n-1)pq\sum_{k'=0}^{n-2}\binom{n-2}{k'}p^{k'}(q+r)^{n-2-k'}\\
&= n(n-1)pq(p+q+r)^{n-2}\\
&= \boxed{n(n-1)pq.}
\end{aligned}$$

9.b. Si $n=0$, alors X_n et Y_n sont toutes les deux des variables aléatoires certaines égales à 0, et donc $E(X_nY_n)=E(0)=0$, donc la formule reste valable.
Si $n=1$, alors X_1 et Y_1 sont à valeurs dans $\{0,1\}$, et les événements $[X_1=1]$ et $[Y_1=1]$ sont incompatibles (car $(1,1)\notin I_1$).
Donc $\forall\omega\in\Omega, X_1(\omega)=0$ ou $Y_1(\omega)=0$. Et donc

$$\forall\omega\in\Omega, (X_1Y_1)(\omega)=0.$$

On en déduit que $E(X_1Y_1)=0$, et donc la formule obtenue précédemment reste valable.

9.c. Par la formule de Huygens, on a

$$\mathrm{Cov}(X_n,Y_n)=E(X_nY_n)-E(X_n)E(Y_n).$$

Mais puisque nous avons prouvé que X_n et Y_n sont binomiales, il vient

$$\mathrm{Cov}(X_n,Y_n)=n(n-1)pq-(np)(nq)=\boxed{-npq.}$$

10. Puisque la covariance de X_n et Y_n n'est pas nulle, les deux variables aléatoires $\boxed{X_n \text{ et } Y_n \text{ ne sont pas indépendantes, au moins pour } n\geqslant 1.}$
Notons que ce résultat était prévisible et ne nécessitait pas forcément un calcul de covariance : on a $P(X_n=n)\neq 0$, $P(Y_n=n)\neq 0$ et $P([X_n=n]\cap[Y_n=n])=0$.

Dans le cas où $n=0$, alors X_0 et Y_0 sont toutes les deux certaines, et donc indépendantes (même si ce cas n'est pas des plus intéressants).

Partie III : une caractérisation de la loi de Poisson
A : Remarques générales

11. Puisque $\{[N=n], n\in \mathbf{N}\}$ est un système complet d'événements, on a $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}[N=n]$, et donc

$$\forall k\in\mathbf{N}, [X=k]=[X=k]\cap\Omega=[X=k]\cap\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}[N=n]\right)=\bigcup_{n=0}^{\infty}([X=k]\cap[N=n]).$$

Mais par définition de X, on sait que $[X=k]\cap[N=n]=[X_n=k]\cap[N=n]$.
Il vient donc

$$[X=k]=\bigcup_{n=0}^{\infty}([X_n=k]\cap[N=n]).$$

Enfin, puisque $X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$, pour $k>n$, on a $[X_n=k]=\emptyset$. On en déduit que

$$\boxed{[X=k]=\bigcup_{n=k}^{\infty}([X_n=k]\cap[N=n]).}$$

Soit $x\in\mathbf{R}$. Puisque X ne prend que des valeurs entières et positives, il est facile de voir que

$$[X\leqslant x]=\emptyset \text{ si } x<0 \text{ et } [X\leqslant x]=[X\leqslant\lfloor x\rfloor] \text{ sinon .}$$

Donc quitte à changer x en sa partie entière, il nous suffit de prouver que
$\forall x\in\mathbf{N}, [X\leqslant x]\in\mathcal{T}$.
Puisque N et les X_n sont des variables aléatoires, on a,

$$\forall k\in\mathbf{N},\forall n\in\mathbf{N},[X_n=k]\in\mathcal{T},[N=n]\in\mathcal{T} \text{ et donc } [X_n=k]\cap[N=n]\in\mathcal{T}.$$

Puisque $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable, on en déduit que

$$\forall k\in\mathbf{N},[X=k]\in\mathcal{T}.$$

Enfin, pour $x\in\mathbf{N}$, on a

$$[X\leqslant x]=\bigcup_{k=0}^{x}[X=k]\in\mathcal{T} \text{ car } \mathcal{T} \text{ est stable par union finie.}$$

En résumé : $\boxed{\forall x\in\mathbf{R},[X\leqslant x]\in\mathcal{T} : X \text{ est une variable aléatoire sur } (\Omega,\mathcal{T},P).}$

12. Soit $n\in\mathbf{N}$ fixé, et soient $(j,k)\in\mathbf{N}^2$. Puisque $\{[Y_n=j], j\in[\![0,n]\!]\}$ est un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales, il vient

$$\begin{aligned}
P([X_n=i]\cap[N=k]) &= \sum_{j=0}^{n}P([X_n=i]\cap[N=k]\cap[Y_n=j])\\
&=\sum_{j=0}^{n}P([(X_n,Y_n)=(i,j)]\cap[N=k])\\
&=\sum_{j=0}^{n}P([(X_n,Y_n)=(i,j)])P(N=k)\\
&=P(N=k)\sum_{j=0}^{n}P([X_n=i]\cap[Y_n=j])\\
&=P(N=k)P(X_n=i)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les variables } X_n \text{ et } N \text{ sont indépendantes.}}$

13. Soit $k\in\mathbf{N}$ fixé. Puisque les événements $[N=n]$ sont deux à deux incompatibles pour $n\in\mathbf{N}$, il en est de même des événements $[X_n=k]\cap[N=n]$, où n parcourt $\mathbf{N}$.
Donc par la question 11,

$$P(X=k)=\sum_{n=k}^{\infty}P([X_n=k]\cap[N=n]).$$

Mais les variables aléatoires X_n et N étant indépendantes, il vient

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(X_n=k)P(N=n) \\ &= \boxed{\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}P(N=n).} \end{aligned}$$

Enfin, comme $\binom{n}{k}=0$ si $k>n$, on a également

$$\boxed{\forall k\in\mathbf{N}, P(X=k)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}P(N=n).}$$

On prouverait de la même manière que

$$\boxed{\forall \ell\in\mathbf{N}, P(Y=\ell)=\sum_{n=\ell}^{\infty}\binom{n}{\ell}q^\ell(1-q)^{n-\ell}P(N=n).}$$

14. Les variables aléatoires N et X ne sont pas indépendantes.
En effet, la variable aléatoire N étant par hypothèse non presque certaine, il existe deux entiers $a<b$ tels que $P(N=a)\neq 0$ et $P(N=b)\neq 0$.
Puisque $P(N=b)\neq 0$, on a $P(X=b)\neq 0$. En effet,

$$P(X=b)\geqslant P([X=b]\cap[N=b])=P([X_b=b]\cap[N=n])=P([X_b=b])P(N=b)>0$$

Remarquons que les événements $[X=b]\cap[N=a]$ sont incompatibles car si $N=a$, alors X prend ses valeurs dans $[\![0,a]\!]$. Ainsi, $P([X=b]\cap[Y=a])=0\neq P(X=b)P(N=a)$.

B : Si N suit une loi de Poisson, alors X et Y sont indépendantes.

15. Soit $k\in\mathbf{N}$. Alors, par la formule prouvée à la question 13, on a

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}\lambda^n \\ &= e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1-p)^n\lambda^{n+k} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k p^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1-p)^n\lambda^n \\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)} \\ &= \boxed{e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}.} \end{aligned}$$

Nous reconnaissons là l'expression d'une $\boxed{\text{loi de Poisson de paramètre } \lambda p.}$
Le même calcul prouverait que Y suit une loi de Poisson de paramètre λq.

16. Soit $(k,\ell)\in\mathbf{N}^2$. Alors puisque $\{[N=n], n\in\mathbf{N}\}$ est un système complet d'événements, il vient

$$\begin{aligned} [X=k]\cap[Y=\ell] &= \bigcup_{n=0}^{\infty}[X=k]\cap[Y=\ell]\cap[N=n] \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty}([X=k]\cap[N=n])\cap([Y=\ell]\cap[N=n]) \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{n=0}^{\infty} ([X_n = k] \cap [N = n]) \cap ([Y_n = \ell] \cap [N = n])$$
$$= \bigcup_{n=0}^{\infty} [X_n = k] \cap [Y_n = \ell] \cap [N = n]$$

On en déduit, car les événements $[N = n]$ sont deux à deux incompatibles, que

$$\begin{aligned} P([X = k] \cap [Y = \ell]) &= \sum_{n=0}^{\infty} P([X_n = k] \cap [Y_n = \ell] \cap [N = n]) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P([X_n = k] \cap [Y_n = \ell]) P(N = n) \\ &= \sum_{n=k+\ell}^{\infty} P([X_n = k] \cap [Y_n = \ell]) P(N = n) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc calculer

$$\begin{aligned} P([X = k] \cap [Y = \ell]) &= \sum_{n=k+\ell}^{\infty} \binom{n}{k,\ell} p^k q^\ell r^{n-k-\ell} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} p^k q^\ell \frac{1}{k!\ell!} \sum_{n=k+\ell}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k-\ell)!} r^{n-k-\ell} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \frac{q^\ell}{\ell!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} r^n \lambda^{n+k+\ell} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \frac{q^\ell}{\ell!} \lambda^{k+\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda r)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} e^{\lambda r} \\ &= e^{-\lambda(p+q)} \frac{p^k}{k!} \frac{q^\ell}{\ell!} \\ &= \left(e^{-\lambda p} \frac{p^k}{k!}\right) \left(e^{-\lambda q} \frac{q^\ell}{\ell!}\right) \\ &= \boxed{P(X = k) P(Y = \ell).} \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons bien prouvé que

$$\forall (k,\ell) \in \mathbf{N}^2, P([X = k] \cap [Y = \ell]) = P(X = k) P(Y = \ell) : \boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$$

C. Si X et Y sont indépendantes, alors N suit une loi de Poisson

17. Si $z \in [0,1]$, alors $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leqslant z^n P(N = n) \leqslant P(N = n)$.
Or la série $\sum_n P(N = n)$ converge (et sa somme vaut 1), donc il en est de même de la série $\sum_n z^n P(N = n)$.

18.a. Puisque $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, alors $0 \leqslant A \leqslant 1$ et $0 \leqslant B \leqslant 1$.

18.b. Puisque $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, alors $0 \leqslant p\alpha \leqslant p$ et donc $0 \leqslant p\alpha + 1 - p \leqslant 1 - p + p \leqslant 1$.
D'après le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned} E(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k P(X = k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} P(N = n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \alpha^k p^k (1-p)^{n-k} P(N = n) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \alpha^k p^k (1-p)^{n-k} P(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p\alpha)^k (1-p)^{n-k} \text{ car } \binom{n}{k} = 0 \text{ si } k > n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)(p\alpha + 1 - p)^n$$

$$= \boxed{\Phi(p\alpha + 1 - p).}$$

19.a. Puisque A et B sont toutes deux positives et majorées par 1, il en va de même pour C, qui admet alors une espérance pour les mêmes raisons.

19.b. Il est clair que $p\alpha + q\beta + r \geqslant 0$. De plus, $p\alpha + q\beta + r \leqslant p + q + r = 1$.
Par application du théorème de transfert[3], on a

$$E(C) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha^k \beta^\ell P([X=k] \cap [Y=\ell])$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha^k \beta^\ell \sum_{n=0}^{\infty} P([X_n = k] \cap [Y_n = \ell]) P(N=n)$$

Ce dernier calcul reprend en fait le résultat intermédiaire de la question 16, qui reste valable dans ce cadre (nous n'avions alors pas utilisé le fait que la loi de N était connue). De plus, remarquons que le théorème de Fubini peut s'appliquer plusieurs fois de manières à permuter trois sommes : dès que l'une existe (et c'est bien le cas ici, puisque nous venons de prouver que $E(C)$ existe, et donc tous nos calcul jusqu'à présent sont justifiés), alors on peut permuter à loisir toutes les sommes, le théorème de Fubini garantissant en même temps leur convergence. Il vient donc

$$E(C) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha^k \beta^\ell \binom{n}{k, \ell} p^k q^\ell r^{n-k-\ell} P(N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \sum_{k=0}^{n} \alpha^k p^k \frac{n!}{(n-k)!k!} \sum_{\ell=0}^{n-k} \beta^\ell \frac{(n-k)!}{\ell!(n-k-\ell)!} q^\ell r^{n-k-\ell}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k p^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} q^\ell \beta^\ell r^{n-k-\ell}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k p^k (\beta q + r)^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)(\alpha p + \beta q + r)^n$$

$$= \boxed{\Phi(\alpha p + \beta q + r)}$$

20. Notons que le support de A est $\{\alpha^k, k \in \mathbf{N}\}$, et de même $B(\Omega) = \{\beta^\ell, \ell \in \mathbf{N}\}$.
De plus, $A = \alpha^k$ si et seulement si $X = k$. Ainsi, $\forall (k,\ell) \in \mathbf{N}^2$,

$$\begin{aligned} P([A = \alpha^k] \cap [B = \beta^\ell]) &= P([X=k] \cap [Y=\ell]) \\ &= P(X=k)P(Y=\ell) \\ &= P(A = \alpha^k)P(B = \beta^\ell) \end{aligned}$$

Par conséquent, A et B sont indépendantes, et donc $E(C) = E(AB) = E(A)E(B)$.
Ceci étant vrai pour pour tous $\alpha, \beta \in [0,1]$, on a

$$\forall (\alpha,\beta) \in [0,1]^2, \Phi(p\alpha + 1 - p)\Phi(q\beta + 1 - q) = \Phi(p\alpha + q\beta + r)$$

et puisque $r = 1 - p - q$, on en déduit que

$$\boxed{\forall (\alpha, \beta \in [0,1]^2, \Phi(1 - p(1-\alpha))\Phi(1 - q(1-\beta)) = \Phi(p\alpha + q\beta + 1 - p - q) = \Phi(1 - p(1-\alpha) - q(1-\beta)).}$$

21. Si $z \in]0,1]$, alors $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(N=n)$.
Puisque N est non presque sûrement constante, il existe en particulier un entier $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $P(N=n_0) > 0$. Alors puisque le terme général de la série définissant Φ est strictement positif, on en déduit que
$$\Phi(z) \geqslant z^{n_0} P(N=n_0) > 0.$$
De plus, $\Phi(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) = 1$ car N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.

22.a. Soit $a \in [0,p]$. Alors $a = p(1-\alpha)$, avec $\alpha = 1 - \frac{a}{p} \in [0,1]$. De même, si $b \in [0,q]$, alors $b = q(1-\beta)$ avec $\beta \in [0,1]$. Par la question 20, on a alors
$$\Phi(1-a-b) = \Phi(1-a)\Phi(1-b).$$
En prenant le logarithme des deux membres, il vient alors
$$\varphi(a+b) = \ln(\Phi(1-a-b)) = \ln(\Phi(1-a)) + \ln(\Phi(1-b)) = \boxed{\varphi(a)+\varphi(b).}$$

22.b. Par définition de φ, $\varphi(0) = \ln(\Phi(1)) = \ln(1) = 0$.
Soit $a \in I$. Prouvons par récurrence sur n que si $0 \leqslant na \leqslant \mu$, alors $\varphi(na) = n\varphi(a)$.
Pour $n=0$, la propriété est claire car $\varphi(0) = 0$.
Supposons la propriété vérifiée au rang n, et supposons que $(n+1)a \leqslant \mu$. Alors
$$\varphi((n+1)a) = \varphi(na+a) = \varphi(na) + \varphi(a) = n\varphi(a) + \varphi(a) = (n+1)\varphi(a).$$
Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $n+1$, et donc par le principe de récurrence,
$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \text{ tel que } na \leqslant \mu, \varphi(na) = n\varphi(a).}$$

22.c. Soit $(n,m,a) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^* \times I$ tel que $0 \leqslant \frac{n}{m}a \leqslant \mu$.
Le résultat étant évident pour $n=0$, on peut supposer que $n \neq 0$. Alors $0 \leqslant \frac{a}{m} \leqslant \mu$, et donc
$$\varphi(a) = \varphi\left(m\frac{a}{m}\right) = m\varphi\left(\frac{a}{m}\right) \text{ par la question précédente.}$$
Puisque m est non nul, ceci signifie que $\varphi\left(\frac{a}{m}\right) = \frac{1}{m}\varphi(a)$.
Il vient alors
$$\varphi\left(\frac{n}{m}a\right) = \varphi\left(n\frac{a}{m}\right) = n\varphi\left(\frac{a}{m}\right) = \boxed{\frac{n}{m}\varphi(a)}.$$

22.d. Par définition de $\lfloor nx \rfloor$, on a
$$\lfloor nx \rfloor \leqslant nx \leqslant \lfloor nx \rfloor + 1$$
et donc en divisant par n (non nul par hypothèse),
$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}.$$
On en déduit que
$$x - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$$
et donc par le théorème des gendarmes,
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x.}$$
Soient $z_1 \leqslant z_2 \in [0,1]$. Alors, $\forall n \in \mathbf{N}, z_1^n \leqslant z_2^n$, et donc
$$\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leqslant z_1^n P(N=n) \leqslant z_2^n P(N=n).$$
Puisque les deux séries $\sum z_1^n P(N=n)$ et $\sum z_2^n P(N=n)$ convergent, on en déduit que
$$\Phi(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} z_1^n P(N=n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} z_2^n P(N=n) = \Phi(z_2).$$

Ainsi, la fonction Φ est croissante sur $[0,1]$. Par composition (à droite) par la fonction décroissante $x \mapsto 1-x$, on en déduit que $z \mapsto \Phi(1-z)$ est décroissante sur $[0,1]$, et enfin par croissance de la fonction ln, que $\boxed{\varphi \text{ est décroissante sur } [0,1[.}$
Ainsi, si $(x,a) \in \mathbf{R} \times I$ vérifient $0 \leqslant xa \leqslant \mu$, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \varphi\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} a\right) \geqslant \varphi(xa) \geqslant \varphi\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} a\right)$$

ce qui en utilisant la question 22.c devient

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\varphi(a) \geqslant \varphi(xa) \geqslant \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\varphi(a).$$

Par le théorème des gendarmes lorsque n tend vers $+\infty$, il vient, (puisque $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ et $\frac{\lfloor nx \rfloor+1}{n}$ tendent tous deux vers x),

$$\boxed{\varphi(xa) = x\varphi(a).}$$

22.e. Notons $\lambda = -\frac{1}{\mu}\varphi(\mu)$. Alors montrons que λ est strictement positif. En effet,

$$\Phi(1-\mu) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\mu)^n P(N=n),$$

et si $n_0 \in \mathbf{N}^*$ est tel que $P(N=n_0) \neq 0$ (nous avons déjà justifié de l'existence d'un tel n_0 à la question 21.), alors $(1-\mu)^{n_0} P(N=n_0) < P(N=n_0)$, et donc

$$\Phi(1-\mu) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\mu)^n P(N=n) < \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) = \Phi(1) = 1.$$

On en déduit que $\varphi(\mu) < \varphi(0) = 0$. Et donc

$$\lambda = -\frac{1}{\mu}\varphi(\mu) > 0.$$

Enfin, si $x \in I$, alors $x = \frac{x}{\mu}\mu$ et d'après la question précédente,

$$\varphi(x) = \frac{x}{\mu}\varphi(\mu) = \frac{x}{\mu} \times (-\lambda\mu) = \boxed{-\lambda x.}$$

23. Nous venons de prouver que $\forall x \in [0,\mu], \varphi(x) = -\lambda x$. On en déduit que

$$\forall z \in [1-\mu, 1], \Phi(z) = e^{\varphi(1-z)} = e^{\lambda z} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n z^n}{n!}.$$

Et donc, en revenant à la définition de Φ,

$$\forall z \in [1-\mu, 1], \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n z^n}{n!} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(P(N=n) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\right) z^n = 0.$$

D'après le résultat admis dans l'énoncé, cela signifie que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, P(N=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.}$$

Ceci signifie que N suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Nous venons donc de prouver que si X et Y sont indépendantes, alors nécessairement $\boxed{N \text{ suit une loi de Poisson.}}$