DM n°2

Exercice 1

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ telles qu'il existe deux polynômes P, Q appartenant à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ avec :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x).$$

Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose :

$$u_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^k \ln(x) \end{array} \right.$$

Pour toute fonction f appartenant à E, on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt$$

et on note φ l'application qui à $f \in E$ associe $\varphi(f)$.

1. Prouver que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et que $E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ (*c'est-à-dire que E est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$*).
   On admettra que la famille $\mathscr{B} = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ est une base de E.
2. Justifier que chaque fonction f de E se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ et, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$.
   Indication : pour calculer $\varphi(v_k)(x)$, on pourra commencer par procéder à une intégration par parties sur un segment de la forme $[A, x]$, avec $0 < A < x$.
3. Démontrer que φ est linéaire. En déduire que $\varphi(f) \in E$ lorsque $f \in E$.
4. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.
5. L'endomorphisme φ est-il bijectif ?

Exercice 2

1. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - \text{Id})^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^n$.
   a. Déterminer $(f - \text{Id})^2 + f \circ (2\text{Id} - f)$.
   b. En déduire que : $\forall x \in \mathbf{R}^n,\ x = (f - \text{Id})^2(x) + \big(f \circ (2\text{Id} - f)\big)(x)$.
   c. Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbf{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
2. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que : $f \circ (f - \text{Id}) \circ (f - 4\text{Id}) = 0$.
   a. Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant $\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1$.
   b. En déduire que : $\mathbf{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
3. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p \geqslant 2$), et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
   a. Montrer qu'il existe p réels $a_1, \dots, a_p$ avec $a_1 \neq 0$, tels que $P = a_1 X + \dots + a_p X^p$.
   b. En déduire que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbf{R}^n = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
   c. En quoi cette question est-elle une généralisation des deux questions précédentes ?