# Correction du DM 2

## Exercice 1

1. Nous allons prouver que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+^*$.
$E$ est clairement formé de fonctions continues, donc inclus dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+^*,\mathbf{R})$, et la fonction nulle est dans $E$ : elle correspond à $P=Q=0$.
Soient $f,g$ deux éléments de $E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Il existe donc quatre polynômes $P_1,P_2,Q_1,Q_2$ de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ tels que pour tout $x\in\mathbf{R}_+^*$,
$$f(x)=xP_1(x)+xQ_1(x)\ln(x) \text{ et } g(x)=xP_2(x)+xQ_2(x)\ln(x).$$
Et donc, pour tout $x\in\mathbf{R}_+^*$, on a
$$(\lambda f+g)(x)=x(\lambda P_1(x)+P_2(x))+x(\lambda Q_1(x)+Q_2(x))\ln(x).$$
Puisque $\lambda P_1+P_2$ et $\lambda Q_1+Q_2$ sont encore dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, on a bien $\lambda f+g\in E$.
Ainsi, $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+^*,\mathbf{R})$, et donc est un espace vectoriel.

Si $f\in E$, soient $P=\sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{n-1} b_kX^k$ deux polynômes de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ tels que
$$\forall x\in\mathbf{R}_+^*,\ f(x)=xP(x)+xQ(x)\ln(x).$$
Alors, pour $x\in\mathbf{R}_+^*$, on a
$$f(x)=x\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k\right)+x\left(\sum_{k=0}^{n-1}b_kx^k\right)\ln(x)=\sum_{k=0}^{n-1}a_ku_{k+1}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}b_kv_{k+1}(x).$$
Donc $f=\sum_{k=0}^{n-1}a_ku_{k+1}+\sum_{k=0}^{n-1}b_kv_{k+1}\in \operatorname{Vect}(u_1,v_1,\dots,u_n,v_n)$. Et donc $E\subset \operatorname{Vect}(u_1,v_1,\dots,u_n,v_n)$.
Réciproquement, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, il est clair que $u_k\in E$ et $v_k\in E$, donc $\operatorname{Vect}(u_1,v_1,\dots,u_n,v_n)\subset E$.
On a alors, $\boxed{E=\operatorname{Vect}(u_1,v_1,\dots,u_n,v_n)}$.

2. Soit $f=\sum_{k=1}^{n}a_ku_k+\sum_{k=1}^{n}b_kv_k\in E$.
Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a $\lim_{x\to0^+}u_k(x)=0$ et par croissances comparées, $\lim_{x\to0^+}v_k(x)=0$.
Ainsi, $\lim_{x\to0^+}f(x)=0$, et donc $f$ se prolonge par continuité en 0.
Puisque $f$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ car combinaison linéaire de fonctions continues, $f$ est donc prolongeable par continuité en une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$.
Pour $k\in[\![1,n]\!]$ et $x\in\mathbf{R}_+^*$, on a
$$\varphi(u_k)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x t^k\,dt=\frac1x\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x=\frac{x^k}{k+1}=\frac{1}{k+1}u_k(x).$$
De même, pour $A\in]0,x[$, par une intégration par parties, en posant $u(t)=\ln(t)$ et $v(t)=\frac{t^{k+1}}{k+1}$, qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A,x]$, avec $u'(t)=\frac1t$ et $v'(t)=t^k$, il vient
$$\begin{aligned}\int_A^x v_k(t)\,dt=\int_A^x t^k\ln(t)\,dt&=\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_A^x-\int_A^x\frac{t^{k+1}}{k+1}\frac1t\,dt\\&=\frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x)-\frac{A^{k+1}}{k+1}\ln(A)-\int_A^x\frac{t^k}{k+1}\,dt\\&=\frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x)-\frac{A^{k+1}}{k+1}\ln(A)-\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}+\frac{A^{k+1}}{(k+1)^2}.\end{aligned}$$

Lorsque $A \to 0^+$, il vient, par croissances comparées,

$$\int_0^x v_k(t)\,dt = \lim_{A\to 0^+} \int_A^x v_k(t)\,dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

On en déduit que

$$\varphi(v_k)(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{k+1}v_k(x) - \frac{1}{(k+1)^2}u_k(x).$$

Et donc $\boxed{\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}u_k \text{ et } \varphi(v_k) = -\frac{1}{(k+1)^2}u_k + \frac{1}{k+1}v_k.}$

**3.** Si $f,g \in E$, et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\varphi(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f(t)+g(t))\,dt = \lambda\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt = \lambda\varphi(f)(x)+\varphi(g)(x).$$

On a donc $\varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$ : $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

Si $f \in E$, alors il existe $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ et $\mu_1,\ldots,\mu_n$ des réels tels que $f = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i u_i + \mu_i v_i)$.

Par linéarité de $f$, on a alors

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\varphi(u_i) + \mu_i\varphi(v_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{1}{i+1}u_i + \sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(\frac{1}{i+1}v_i - \frac{1}{(i+1)^2}u_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{i+1} - \frac{\mu_i}{(i+1)^2}\right)u_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{i+1}v_i \in \mathrm{Vect}(u_1,v_1,\ldots,u_n,v_n) = E.
\end{aligned}$$

**4.** D'après les calculs effectués à la question 2, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \varphi(u_1) & \varphi(v_1) & \varphi(u_2) & \varphi(v_2) & \ldots & \ldots & \varphi(u_n) & \varphi(v_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \frac{1}{n+1} & -\frac{1}{(n+1)^2} \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1}
\end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \\ \\ u_n \\ v_n \end{array}$$

**5.** La matrice de $\varphi$ dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc elle est inversible : $\boxed{\varphi \text{ est bijectif.}}$

## Exercice 2

**1.a.** On a

$$(f-\mathrm{Id})^2 + f\circ(2\mathrm{Id}-f) = f^2 - 2f + \mathrm{Id} + 2f - f^2 = \boxed{\mathrm{Id}.}$$

**1.b.** Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Alors, par la question précédente, on a

$$x = \mathrm{Id}(x) = \boxed{(f-\mathrm{Id})^2(x) + \big(f\circ(2\mathrm{Id}-f)\big)(x).}$$

**1.c.** Si $x \in \mathbf{R}^n$, alors $f\left((f-\mathrm{Id})^2(x)\right) = 0$, de sorte que $(f-\mathrm{Id})^2(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
D'autre part, $\big(f\circ(2\mathrm{Id}-f)\big)(x) = f(2x - f(x)) \in \mathrm{Im}(f)$.
Donc $x = (f-\mathrm{Id})^2(x) + \big(f\circ(2\mathrm{Id}-f)\big)(x) \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.
Ainsi, $\mathbf{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Il reste donc à prouver que la somme est directe.
Mais, par le théorème du rang, on a

$$\dim\mathrm{Ker}\,f + \dim\mathrm{Im}\,f = \dim\mathbf{R}^n = \dim(\mathrm{Im}\,f + \mathrm{Ker}\,f).$$

Ceci prouve donc que la somme $\mathrm{Im}\,f+\mathrm{Ker}\,f$ est directe, et donc que $\boxed{\mathbf{R}^n = \mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f}$

$f =$ $n$

**Alternative** : toujours par le théorème du rang, on a $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbf{R}^n$.
Si $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$, alors

$$(f \circ (2\mathrm{Id} - f(x))) = 2f(x) - f(f(x)).$$

Mais $x$ étant dans $\operatorname{Ker} f$, il vient $f(x) = 0$ et donc $(f \circ (2\mathrm{Id} - f(x))) = 0$.
D'après le résultat de 1.b, on a donc $x = (f - \mathrm{Id})^2(x)$.
Mais puisque $x \in \operatorname{Im} f$, il existe $y \in \mathbf{R}^n$ tel que $x = f(y)$ et donc

$$x = (f-\mathrm{Id})^2(f(y)) = (f^2-2f+\mathrm{Id})(f(y)) = f^3(y)-2f^2(y)+f(y) = f\ (f^2(y)-2f(y)+\mathrm{Id}(y)) = (f\circ(f-\mathrm{Id})^2)(y) = 0.$$

Et donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

**2.a.** Puisqu'on cherche $P$ sous forme d'un polynôme du premier degré, notons $P = aX + b$.
Alors

$$\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + X(aX+b) = \frac{1}{4}X^2 - \frac{5}{4}X + 1 + aX^2 + bX = \left(\frac{1}{4} + a\right)X^2 + \left(b - \frac{5}{4}\right)X + 1.$$

Par identification des coefficients, cette expression vaut 1 si et seulement si

$$\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Donc $\boxed{P = -\frac{1}{4}X + \frac{5}{4}}$ convient.

**2.b.** De la question précédente, il vient

$$\mathrm{Id} = \frac{1}{4}(f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}) + f \circ P(f).$$

Et donc pour $x \in \mathbf{R}^n$, on a

$$x = \frac{1}{4}\left((f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id})\right)(x) + f(P(f)(x)).$$

Mais, d'une part on a : $f(P(f)(x)) \in \operatorname{Im}(f)$. Et d'autre part, puisque $f\circ(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id}) = 0$, alors $\operatorname{Im}((f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id})) \subset \operatorname{Ker}(f)$.
Ainsi, $((f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}))(x) \in \operatorname{Im}((f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})) \subset \operatorname{Ker}(f)$, et donc $x \in \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(f)$.
On a donc $\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f)$. Il suffit alors de conclure comme dans la question 1.c :
$\boxed{\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f).}$

**3.a.** Puisque $\deg(P) = p$, il existe $a_0, \dots, a_p$ tels que $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$.
Or, $P(0) = 0$, et donc $a_0 = 0$.
De plus, $P'(X) = a_1 + 2a_2X + \cdots + pa_pX^{p-1}$, de sorte que $P'(0) = a_1$. Et donc $a_1 \neq 0$ par hypothèse.
Ainsi, $\boxed{P = a_1X + \cdots + a_pX^p, \text{ avec } a_1 \neq 0.}$

**3.b.** Soit $x \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.
Puisque $x \in \operatorname{Im}(f)$, il existe $y \in \mathbf{R}^n$ tel que $x = f(y)$. D'autre part, $x \in \operatorname{Ker}(f)$ et donc $f(x) = f^2(y) = 0$.
$P$ étant un polynôme annulateur de $f$, on en déduit que

$$0 = P(f)(y) = a_1 f(y) + a_2 f^2(y) + \cdots + a_p f^p(y) = a_1 f(y) = a_1 x.$$

Mais $a_1 \neq 0$, et donc nécessairement $x = 0$.
On en déduit que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$.
Par le théorème du rang, on a $\dim \operatorname{Im}(f) + \dim \operatorname{Ker}(f) = \dim \mathbf{R}^n$, et donc $\boxed{\mathbf{R}^n = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f).}$

**3.c.** L'endomorphisme de la question 1 était annulé par le polynôme $P = X(X-1)^2$, qui possède 0 comme racine simple, donc $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
De même, l'endomorphisme de la question 2 est annulé par $P = X(X-1)(X-4)$, qui possède également 0 comme racine simple.