ESSEC 2010 : Corrigé

I. Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U

1. *Étude de l'équation* (E_f)

   (a) Par produit de fonction dérivables, la fonction $x \mapsto e^{-ax}y(x)$ est bien dérivable sur I, et sa dérivée est $x \mapsto e^{-ax}(-ay(x) + y'(x))$.
   Si y est solution de (E_f), alors $y' - ay = -f$, et donc la dérivée calculée précédemment est $x \mapsto -f(x)e^{-ax}$. Les primitives de cette fonction (continue) sont donc
   $$x \mapsto K - \int_1^x f(t)e^{-at}\mathrm{d}t, \quad K \in \mathbb{R}.$$
   Comme $x \mapsto e^{-ax}y(x)$ est aussi une primitive, elle est de cette forme-là, d'où le résultat attendu.
   Inversement, si y est de la forme indiquée, on a
   $$\forall x \in I,\ y'(x) = ay(x) - e^{ax}e^{-ax}f(x) = ay(x) - f(x),$$
   et donc y est solution de (E_f).

   (b) Soient donc y_1 et y_2 deux solutions bornées. y_1 et y_2 sont de la forme de la question précédentes, avec des constantes respectives K_1 et K_2.
   On a alors $y_1(x) - y_2(x) = e^{ax}(K_1 - K_2)$, *i.e.* $K_1 - K_2 = e^{-ax}(y_1(x) - y_2(x)$.
   Comme $y_1 - y_2$ est bornée, le terme de droite tend vers 0 quand $x \to \infty$, et donc $K_1 = K_2$.

   (c) En 1, la fonction est continue. En $+\infty$, on a $|e^{-at}f(t)| \leqslant Me^{-at}$, où M est un majorant de $|f|$. Cette dernière fonction est intégrable, d'où le résultat.

   (d) Si on prouve que g est une solution bornée, on aura directement l'unicité par la question *I*1*b*.
   La fonction g est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in I$,
   $$g'(x) = ag(x) - f(x).$$
   g est donc bien solution de (E_f).
   Soit $x \in I$. On a alors
   $$\begin{aligned}
   |g(x)| &\leqslant e^{ax}\int_x^{\infty} e^{-at}|f(t)|\mathrm{d}t && \text{par inégalité triangulaire}\\
   &\leqslant Me^{ax}\int_x^{\infty} e^{-at}\mathrm{d}t && \text{où } M \text{ est un majorant de } |f|\\
   &= Me^{ax}\frac{1}{a}e^{-ax} && \text{en calculant l'intégrale}\\
   &= \frac{M}{a}
   \end{aligned}$$
   g est donc bornée.

2. *Linéarité de U*

(a) Dans le cas $f = 1$, on a pour tout $x \in I$

$$U(1)(x) = e^{ax} \int_x^{\infty} e^{-at} \mathrm{d}t = \frac{1}{a}$$

(b) Montrons d'abord que si $f \in E$, alors $U(f) \in E$. $U(f)$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables, donc continue, et elle est bornée par définition.
La linéarité de U est évidente ; elle découle directement de la linéarité de l'intégrale.

(c) On calcule le noyau de U. Soit $f \in \ker U$. On sait que $U(f)$ est solution de (E_f), et donc

$$U(f)' - aU(f) + f = 0.$$

Comme $U(f) = 0$, sa dérivée aussi, et on en tire tout de suite $f = 0$.
Le noyau de U est donc nul, et donc U est injectif.

(d) On le montre par récurrence.
Le cas $n = 0$ est évident : c'est la définition de U.
Supposons la formule vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
On a alors pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} U^{n+2}(f)(x) &= U^{n+1}(U(f))(x) \\ &= e^{ax} \int_x^{\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U(f)(t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

On va faire une intégration par partie, en intégrant $\frac{(t-x)^n}{n!}$ et en dérivant $e^{-at}U(f)(t)$ (on a déjà vu en question I1a que la dérivée est $-e^{-at}f(t)$).
Soit donc $A > 1$.

$$\int_x^A \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U(f)(t) \mathrm{d}t = \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U(f)(t) \right]_x^A + \int_x^A \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t) \mathrm{d}t$$

Quand $x = 1$, le crochet est nul, et quand $A \to \infty$, le crochet s'annule aussi par croissances comparées, et cas $U(f)$ est bornée.
On a donc bien la formule cherchée pour $n + 1$, et donc par théorème de récurrence, on a le résultat demandé.

3. *Cas des fonctions exponentielles*

(a) Soit $k \in \mathbb{R}^+$, et soit $x \in I$. Alors

$$\begin{aligned} U(f_k)(x) &= e^{ax} \int_x^{\infty} e^{-(a+k)t} \mathrm{d}t \\ &= e^{ax} \left[\frac{-1}{a+k} e^{-(a+k)t} \right]_x^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+k} f_k(x) \end{aligned}$$

(b) Soit $\lambda \in]0, 1/a]$. Dire que $f \in \ker(U - \lambda \mathrm{id}_E)$ signifie que $U(f) = \lambda f$ (On dira plus tard que f est un vecteur propre de f). On cherche donc une fonction non nulle telle que $U(f) = \lambda f$. D'après la question précédente, il suffit de choisir k tel que $\lambda = \frac{1}{a+k}$.
Si $k = \frac{1-\lambda a}{\lambda}$, f_k est une fonction non nulle qui répond au problème.

(c) Une récurrence évidente nous donne directement

$$U^n(f_k)(x) = \frac{1}{(a+k)^n} f_k(x).$$

Il suffit donc de regarder la limite de $\frac{1}{(a+k)^n}$.

- si $a+k>1$, alors la limite est 0
- si $a+k=1$, alors la limite est 1
- si $a+k<1$, alors la limite est ∞.

4. *Cas des fonctions sinus et cosinus*

   (a) On calcule, pour $x \in I$.

   $$U(\sin)(x) = e^x \int_x^\infty e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t$$

   On va faire des intégrations par parties. Soit donc $A > 1$.

   $$\begin{aligned}\int_x^A e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t &= \left[-e^{-t}\sin(t)\right]_x^A + \int_x^A e^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t \\ &= \sin(x)e^{-x} - \sin(A)e^{-A} + \left[-e^{-t}\cos(t)\right]_x^A - \int_x^A e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   On fait tendre $A \to \infty$:

   $$\int_x^\infty e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t = \sin(x)e^{-x} + \cos(x)e^{-x} - \int_x^\infty e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t,$$

   Et donc
   $$\int_x^\infty e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t = e^{-x}\frac{1}{2}(\sin(x)+\cos(x)).$$

   Au final,
   $$U(\sin) = \frac{1}{2}(\sin + \cos).$$

   En reprenant l'intégration par parties, on a vu que

   $$\int_x^\infty e^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t = \int_x^\infty e^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t - \sin(x)e^{-x}.$$

   On en déduit donc
   $$U(\cos) = U(\sin) - \sin = \frac{1}{2}(\cos - \sin).$$

   (b) Comme $(\sin, \cos)$ est une partie génératrice de P par définition, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient donc $\lambda, \mu \in R$ tels que $\lambda \sin + \mu \cos = 0$.
   En évaluant en $\frac{\pi}{2}$ et en π, on trouve $\lambda = \mu = 0$. Donc $(\sin, \cos)$ est une base de P, et la question précédente montre la stabilité.
   La matrice U dans cette base est donc

   $$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

   (c) On calcule :
   $$M^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad M^3 = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}, \quad M^4 = -\frac{1}{4}I_2$$

   On en déduit donc toutes les puissances de M, suivant le reste modulo 4 :

   $$M^{4k} = (-\frac{1}{4})^k I_2,\ M^{4k+1} = (-\frac{1}{4})^k M,\ M^{4k+2} = (-\frac{1}{4})^k M^2,\ M^{4k+3} = (-\frac{1}{4})^k M^3.$$

   Dans tous les cas, quand la puissance tend vers ∞, les coefficients tendent vers 0.

5. *Une autre famille de fonctions*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait une intégration par parties : soit $A > 1$.

$$e^{ax}\int_x^A e^{-(a+1)t}t^n \mathrm{d}t = e^{ax}\left(\left[-\frac{1}{a+1}e^{-(a+1)t}t^n\right]_x^A + \frac{n}{a+1}\int_x^A e^{-(a+1)t}t^{n-1}\mathrm{d}t\right)$$

Quand $A \to \infty$, on obtient alors

$$\psi_n(x) = \frac{1}{a+1}\varphi_n(x) + \frac{n}{a+1}\psi_{n-1}(x).$$

(b) Montrons que $(\varphi_0, \dots, \varphi_p)$ est bien une base de F_p. Soient donc $\lambda_0, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0\varphi_0 + \cdots + \lambda_p\varphi_p = 0.$$

Alors, comme exp est positive, on a

$$\sum_{k=0}^{p} \lambda_k x^k = 0.$$

On a donc un polynôme nul, et donc tous ses coefficients sont nuls.
$(\varphi_0, \dots, \varphi_p)$ est donc libre, et est donc une base.
La stabilité se vérifie aisément avec la question précédente.

(c) On a déjà calculé $U(\varphi_0) = \frac{1}{a+1}\varphi_0$. Par la formule de la question I5a, on a donc $U(\varphi_1) = \frac{1}{a+1}\varphi_1 + \frac{1}{a+1}\varphi_0$, et $U(\varphi_2) = \frac{1}{a+1}\varphi_2 + \frac{2}{a+1}U(\varphi_1)$ On peut donc calculer la matrice :

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+1} & \frac{1}{a+1} & \frac{2}{(a+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{a+1} & \frac{2}{(a+1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}$$

On peut écrire $T_2 = \frac{1}{a+1}I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a+1} & \frac{2}{(a+1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{(a+1)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que $N^3 = 0$, et donc, comme I_3 et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$T_2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \frac{1}{(a+1)^{n-k}} I_3 = \frac{1}{(a+1)^n} I_3 + n\frac{1}{(a+1)^{n-1}}N + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{(a+1)^{n-2}}N^2.$$

On obtient, après calculs :

$$T_2^n = \frac{1}{(a+1)^n}\begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{a+1} & \frac{n^2+n}{(a+1)^2} \\ 0 & 1 & \frac{2n}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $a + 1 > 1$, la limite quand $n \to \infty$ est donc 0.

6. *Une autre expression de $U(f)$*

On fait le changement de variable $u = t - x$. On pose donc une fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0, \infty[& \longrightarrow & [x, \infty[\\ t & \longmapsto & t + x \end{array}.$$

φ est une fonction $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, et on peut donc appliquer le théorème de changement de variables :

$$U(f)(x) = e^{ax}\int_0^\infty e^{-a(t+x)}f(t+x)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-at}f(x+t)\mathrm{d}t.$$

7. *Positivité de U*

   (a) L'intégrale définissant $U(f)$ est bien absolument convergente, et donc il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire.

   (b) Par positivité de l'intégrale, c'est évident.

   (c) Soient $t \geqslant x \in I$. On a donc $\varphi(t) \leqslant \varphi(x)$, et donc

   $$e^{-at}\varphi(t) \leqslant e^{-at}\varphi(x).$$

   Par croissance de l'intégrale, et comme les intégrales mises en jeu convergent, on a donc

   $$e^{ax}\int_x^\infty e^{-at}\varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant e^{ax}\int_x^\infty e^{-at}\varphi(x)\mathrm{d}t.$$

   Le membre de gauche est ψ, et le membre de droite vaut exactement $\frac{1}{a}\varphi(x)$. En multipliant par a, on obtient bien le résultat demandé.
   Comme $\psi' = a\psi - \varphi$, la dérivée de ψ est donc négative, et donc ψ est décroissante.

8. *Commutation de U avec la dérivation*

   (a) Soit $x > 0$, et soit $A > 0$. On a

   $$\int_0^A e^{-at}f(x+t)\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{a}e^{-at}f(x+t)\right]_0^A + \frac{1}{a}\int_0^A e^{-at}f'(x+t)\mathrm{d}t$$

   Quand $A \to \infty$, le crochet tend vers $\frac{1}{a}f(x)$, et l'intégrale vers $U(f')$.
   Au final, on a bien $aU(f) = f + U(f')$.

   (b) On a donc, pour $f \in E_1$, $D(U(f)) = aU(f) - f = U(D(f))$

   (c) Si f est positive et décroissante, alors $D(f)$ est négative, et donc, par positivité de l'intégrale, $U(D(f))$ est négative.
   On en déduit donc que $D(U(f)) \leqslant 0$, et donc $U(f)$ est décroissante.

II. Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de ∞

1. *Résultats préliminaires*

   (a) Commençons par affirmer, par positivité de β, que l'intégrale de α converge absolument au voisinage de $+\infty$.
   Ensuite, on a donc, pour le ε choisi,

   $$|\alpha(x)| \leqslant \varepsilon beta(x)$$

   dès que x est plus grand qu'un certain A.
   Dès que $x > A$, on a donc

   $$\begin{aligned}\left|\int_x^\infty \alpha(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_x^\infty |\alpha(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \varepsilon\int_x^\infty \beta(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   Cette propriété est exactement la définition de négligeabilité, et on a donc montré

   $$\int_x^\infty \alpha(t)\mathrm{d}t = \underset{x\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\int_x^\infty \beta(t)\mathrm{d}t\right).$$

(b) Par équivalents, on peut donc dire que α est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Rappelons que $\alpha(x) \sim \beta(x)$ est équivalent à dire $\alpha(x) - \beta(x) = \underset{x\to\infty}{\mathrm{o}}(\beta(x))$.
On a donc, d'après la question précédente,

$$\int_x^\infty (\alpha(t) - \beta(t))\mathrm{d}t = \underset{x\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\int_x^\infty \beta(t)\mathrm{d}t\right),$$

ce qui signifie exactement que les deux intégrales sont équivalentes.

2. *Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$*
Commençons par le cas $b = 0$. On a alors $e^{-at}f(t) = \mathrm{o}\left(e^{-at}\right)$, et $t \mapsto e^{-at}$ est bien positive, et intégrable au voisinage de $+\infty$.
D'après la question II1, on a donc

$$\int_x^\infty e^{-at}f(t)\mathrm{d}t = \underset{x\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\int_x^\infty e^{-at}\mathrm{d}t\right) = \underset{x\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{a}e^{-ax}\right),$$

et donc

$$U(f)(x) = o(1).$$

Si $b \neq 0$, on peut écrire $f = b + g$, où g est une fonction de E de limite 0 en ∞. On a alors $U(f) = U(b) + U(g)$, avec

$$U(b)(x) = \frac{b}{a} \quad \text{(question I2a)}.$$

Finalement, $U(f)$ converge vers $\frac{b}{a}$ en $+\infty$.

3. *Cas des fonctions puissance*

(a) On a pour tout x

$$g_\omega(x) = e^{ax}\int_x^\infty e^{-at}\frac{\mathrm{d}t}{t^\omega}.$$

On va faire une intégration par parties : soit donc $A > x$.

$$\begin{aligned}\int_x^A e^{-at}\frac{\mathrm{d}t}{t^\omega} &= \left[-\frac{1}{a}e^{-at}f_\omega(t)\right]_x^A - \frac{\omega}{a}\int_x^A e^{-at}f_{\omega+1}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a}e^{-ax}f_\omega(x) - \frac{1}{a}e^{-aA}f_\omega(A) - \frac{\omega}{a}\int_x^A e^{-at}f_{\omega+1}(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Quand $A \to \infty$, on retrouve donc bien

$$g_\omega(x) = \frac{1}{a}f_\omega(x) - \frac{\omega}{a}g_{\omega+1}(x).$$

Or on sait que $e^{-at}f_{\omega+1}(t) = \underset{t\to\infty}{\mathrm{o}}\left(e^{-at}f_\omega(t)\right)$, et donc, d'après la question II1a, on a donc $g_{\omega+1}(t) = \underset{t\to\infty}{\mathrm{o}}(g_\omega(t))$.
Donc, on a bien $\frac{1}{a}f_\omega(x) - g_\omega(x) = \underset{x\to\infty}{\mathrm{o}}(g_\omega(x))$, et donc l'équivalence demandée.

(b) On écrit donc l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $\varphi : t \mapsto e^{-at}$ (qui est bien $\mathcal{C}^\infty$). On a donc $\varphi^{(k)}(x) = (-a)^k\varphi(x)$, et donc $\left|\varphi^{(n+1)}(x)\right| \leqslant a^{n+1}$. Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t > 0,\ \left|e^{-at} - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}(-a)^k\right| \leqslant \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}a^{n+1}.$$

En divisant par t de chaque côté, on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t > 0,\ \left| \frac{1}{t}e^{-at} - \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{k!}(-a)^k \right| \leqslant \frac{t^n}{(n+1)!}a^{n+1}.$$

On peut alors intégrer cette inégalité sur le segment $[1, x]$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 1,\ \int_1^x \left| \frac{1}{t}e^{-at} - \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{k!}(-a)^k \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{t^n}{(n+1)!}a^{n+1}\mathrm{d}t.$$

On peut calculer le terme de droite, qui vaut

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}(x^{n+1} - 1).$$

Quand $n \to \infty$, ce terme tend donc vers 0 (comparaison exponentielle/factorielle), et on en déduit donc que la limite du terme de gauche, qui est toujours positif, est nulle.
Par inégalité triangulaire, la limite de la valeur absolue de l'intégrale est donc nulle aussi, et on obtient donc

$$\forall x > 1,\ \int_1^x \frac{1}{t}e^{-at} - \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!}(-a)^k \mathrm{d}t = 0.$$

La linéarité, puis le calcul des intégrales nous donne bien le résultat voulu.
On a

$$g_1(x) = e^{ax} \int_x^{\infty} \frac{1}{t}e^{-at}\mathrm{d}t.$$

Par relation de Chasles, on a

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t}e^{-at}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t}e^{-at}\mathrm{d}t + \int_x^{\infty} \frac{1}{t}e^{-at}\mathrm{d}t,$$

et on en déduit le résultat voulu.

4. *Cas des fonctions comparables aux fonctions puissance f_ω*

   (a) On suppose qu'il existe ω tel que $f(t) \underset{t\to\infty}{=} \mathrm{o}\,(f_\omega(t))$. On a alors $e^{-at}f(t) \underset{t\to\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{-at}f_\omega(t)\right)$, et donc, comme la fonction de droite est bien continue, positive et d'intégrale convergente, en appliquant le résultat II1a, on a bien

   $$g(x) \underset{x\to\infty}{=} \mathrm{o}\,(g_\omega(x)).$$

   (b) De la même façon, si $f(t) \sim f_\omega(t)$, on peut appliquer le résultat II1b pour trouver $g(x) \sim g_\omega(x)$, qui est lui-même équivalent à $\frac{1}{a}f_\omega(x)$ (question II3a), qui est équivalent à $\frac{1}{a}f(x)$ par hypothèse.

III. Convergence absolue de $\int_1^\infty ()$

1. *Études d'exemples*

   (a) On a déjà vu que $g_k(x) = \frac{1}{a+k}f_k(x)$ (question I3a). L'intégrale de g_k sur $[1, \infty[$ est donc convergente.

   (b) On sait (question II3a) que $g_\omega \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{a}f_\omega$. Le seul problème étant en ∞, l'intégrale de g_ω converge donc si et seulement si celle de f_ω converge, *i.e.* si $\omega > 1$.

2. *Cas des fonctions positives*

(a) Dérivons $G' - aG + F$; on obtient, par théorème fondamental de l'analyse, $G'' - aG' + F' = g' - ag + f = 0$. La fonction $G' - aG + F$ est donc constante, égale par exemple à $(G' - aG + F)(1) = g(1)$.

(b) On veut montrer que F est continue et bornée ; elle est trivialement continue, puisque dérivable.

On a de plus, $F' = f \geqslant 0$, donc F est croissante sur $[1, \infty[$. Comme $\lim_{x \to \infty} F(x)$ est finie, on en déduit donc que F est bornée sur un voisinage $[A, \infty[$, et comme F est continue sur le segment $[1, A]$, elle y est bornée.

Finalement, $F \in E$.

Calculons la dérivée de $h(x) = e^{-ax} G(x)$. On a

$$h'(x) = e^{-ax}(G'(x) - aG(x)) = e^{-ax}(-F(x) + g(1)).$$

On a donc l'existence d'une constante K telle que $h(x) = \int_x^\infty e^{-at} F(t) \mathrm{d}x - \frac{1}{a} e^{-ax} g(1) + K$.

On obtient donc

$$G(x) = K e^{ax} + U(F)(x) - \frac{g(1)}{a}.$$

(c) On sait que g est bornée sur I : soit M un majorant de $|g|$. On a alors

$$\begin{aligned} |G(x)| &= \left| \int_1^x g(t) \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_1^x |g(t)| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_1^x M \mathrm{d}t \\ &= (x-1)M \end{aligned}$$

Finalement, $\left| \frac{G(x)}{x} \right| \leqslant \frac{x-1}{x} M \leqslant M$.

(d) D'après la question III2b, on a donc

$$\frac{G(x)}{x} = K \frac{e^{ax}}{x} + \frac{U(F)(x)}{x} - \frac{\frac{g(1)}{a}}{x}.$$

Tous les termes, sauf $K \frac{e^{ax}}{x}$ sont bornés sur I, et donc nécessairement $K = 0$. Donc

$$G = U(F) - \frac{g(1)}{a}.$$

(e) Comme g est positive (question I7b), G est croissante, et comme G est bornée, G admet une limite finie en $+\infty$. Donc l'intégrale considérée converge.

3. *Cas général*

On sait (question I7a) que $|U(f)| \leqslant U(|f|)$, donc pour tout t, $|g(t)| \leqslant U(|f|)(t)$.

D'après la question précédente, on sait que $\int_1^\infty U(|f|)(t) \mathrm{d}t$ converge, et donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_1^\infty g(t) \mathrm{d}t$ converge absolument.