ECS2 : Corrigé EDHEC 2015

Exercice 1

On commence par définir la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} [1,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^n(x+1)} \end{array}.$$

1. La fonction f_n est continue sur $[1,\infty[$. En $+\infty$, on a l'équivalent

$$f_n(t) \sim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n+1}}.$$

   Comme $n \geqslant 1$, on a $n+1 \geqslant 2$, et donc l'intégrale de Riemmann $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}}$ converge.

   Par comparaison de fonctions positives, $\int_1^\infty f_n(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

2. (a) Calculons, pour $x \neq -1, 0$

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} &= \frac{(x+1)a - bx}{x(x+1)} \\ &= \frac{(a-b)x + a}{x(x+1)} \end{aligned}$$

   En identifiant les coefficients, on trouve $a = 1$ et $b = 1$.

   (b) Soit $A > 0$. On calcule

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} &= \int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t+1} \text{ par linéarité de l'intégrale sur un segment} \\ &= \ln(A) - \ln(1) - (\ln(A+1) - \ln(2)) \\ &= \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) + \ln(2) \end{aligned}$$

   Quand $A \to \infty$, on trouve $I_1 = \ln(2)$.

3. (a) La fonction f_n est positive, et donc par positivité de l'intégrale, $I_n \geqslant 0$.
   On a, pour $x \geqslant 1$, $x^n(x+1) \geqslant 2x^n$, et donc $f_n(x) \leqslant \frac{1}{2x^n}$.
   Par croissance de l'intégrale, comme $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{x^{n+1}}$ converge,

$$I_n \leqslant \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{2x^n} = \left[\frac{1}{-2(n-1)x^{n-1}}\right]_1^\infty = \frac{1}{2(n-1)}.$$

   (b) Par théorème d'encadrement des limites, on obtient donc

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

4. (a) Soit $x \geqslant 1$. On a alors

$$f_n(x) + f_{n+1}(x) = \frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)} = \frac{x+1}{x^{n+1}(x+1)} = \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Par linérarité de l'intégrale, on a donc

$$I_n + I_{n+1} = \int_1^\infty (f_n(t) + f_{n+1}(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{n}.$$

(b) Pour $x \geqslant 1$, $x^{n+1} \geqslant x^n$, et donc $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$. Par croissance de l'intégrale,

$$I_{n+1} \leqslant I_n,$$

et donc la suite (I_n) est décroissante.

(c) On a donc $I_n + I_{n-1} \geqslant 2I_n \geqslant I_n + I_{n+1}$, donc

$$\frac{1}{n-1} \geqslant 2I_n \geqslant \frac{1}{n}.$$

Par théorème d'encadrement des limites, $2nI_n \to 1$, et donc $I_n \sim \frac{1}{2n}$.
La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, et donc $\sum I_n$ diverge.

5. (a) Pour les mêmes raisons que I_n, l'intégrale J_n est convergente.

(b) On a

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(x+1)^2} \\ &= \left[-\frac{1}{(x+1)}\right]_1^\infty \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et soit $x \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^k(x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2} &= \frac{1+x}{x^k(x+1)^2} \\ &= f_k(x) \end{aligned}$$

Donc, par linéarité de l'intégrale, $J_k + J_{k-1} = I_k$.

(b) On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}(J_k + J_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} J_k - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k-1} J_k \\ &= (-1)^{n-1} J_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c) Par le même raisonnement qu'en question 3a, on a donc

$$\frac{1}{x^n(x+1)^2} \leqslant \frac{1}{4x^n},$$

et on retrouve directement l'inégalité demandé.
Par théorème d'encadrement des limites, $\lim_{n\to\infty} J_n = 0$.

(d) D'après la question 6b, on a donc
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k$$
existe et vaut
$$\lim_{n\to\infty}((-1)^{n-1}J_n+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}.$$

7. On sait que $J_k = J_{k-1} + I_k$ et $I_{k+1} = \frac{1}{n} - I_k$.

```
n=input(''entrez une valeur de n supérieure ou égale à2:'')
I=log(2); J=1/2; J= J + I;
for k=2:n
   I=1/(k-1)-I; J=J+I;
end
disp(I,''la valeur de I est:'')
disp(J,''la valeur de J est:'')
```

Exercice 2

1. (a) Soit $x \geqslant 0$. On a alors
$$\begin{aligned}F_Y(x) &= P(Y \leqslant x)\\ &= P(|X| \leqslant x)\\ &= P(-x \leqslant X \leqslant x)\\ &= \Phi(x)-\Phi(-x)\end{aligned}$$
Φ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$, et donc F_Y aussi sur R^+.
Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, $F_Y(x) = 0$, qui est aussi continue et de classe $\mathcal{C}^1$. Et
$$\lim_{x\to 0, x>0} = 0 = \lim_{x\to 0, x<0}.$$
Finalement, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
Donc Y est bien une variable à densité.
F_Y est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et il suffit donc de la dériver pour obtenir une densité de Y :
$$f_Y(x) = \begin{cases}\Phi'(x)+\Phi'(-x) & \text{si } x \geqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

(b) La variable Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} xf_y(x)\mathrm{d}x$ converge. Or la fonction $x \mapsto xf_Y(x)$ est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue sur $\mathbb{R}^+$, et $xf_Y(x) = \mathrm{o}(x^{-2})$, donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives, Y admet une espérance. On a de plus
$$\begin{aligned}E(Y) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-x^2/2}\right]_0^{\infty}\\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

(c) On a $Y^2 = X^2$, et on sait que X admet un moment d'ordre 2. Donc Y admet une variance.
On a alors $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1 - \frac{2}{\pi}$.

2. (a) La fonction φ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & \sqrt{2t} \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et est une bijection strictement croissante. On peut donc appliquer le théorème de changement de variables :

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} g(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{\infty} e^{-u^2/2}\frac{1}{\sqrt{\pi u^2/2}}u\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-u^2/2}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale étant convergente, $\int_0^{\infty} g(t)\mathrm{d}t$ aussi.

(b) La fonction g est positive, continue sauf éventuellement en 0, et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. C'est donc la densité d'une variable aléatoire.

3. (a) On note que T est positive presque sûrement. Donc si $x < 0$, $F_T(x) = 0$. Soit $x \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}F_T(x) &= P(\sqrt{2Z} \leqslant x) \\ &= P(2Z \leqslant x^2) \\ &= P(Z \leqslant x^2/2) && = G(x^2/2)\end{aligned}$$

La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et $x \mapsto x^2/2$ aussi, donc par composition, F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et

$$f_T(x) = \begin{cases} xg(x^2/2) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Or, pour tout $x > 0$, $xg(x^2/2) = f_Y(x)$, et donc T et Y ont la même densité, et donc la même loi.

(b) On a donc $Z = T^2/2$, et on a vu que Y, qui a la même loi que T, admet un moment d'ordre 2. Z admet donc une espérance égale à $E(Z) = \frac{1}{2}E(Y^2) = \frac{1}{2}$.

4. On commence par simuler X par

```
x= grand(1,1,'norm',0,1)
```

On a vu que $Z = Y^2/2$, et donc on peut simuler Z avec la commande

```
z = grand(1,1,'norm',0,1)^2/2
```

5. (a) L'algorithme simule n variables $W_1, \ldots, W_n$ exponentielles de paramètre 1, et calcule la quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{W_i\sqrt{W_i}}{\sqrt{\pi}}.$$

Chacune des variables $\frac{W_i\sqrt{W_i}}{\sqrt{\pi}}$ admettant une espérance et une variance, on en déduit donc, par la loi faible des grands nombres, que cette quantité tend vers l'espérance commune de ces variables, notée m.

Par théorème de transfert, on a

$$m = \int_0^{\infty}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x^2 g(x)\mathrm{d}x.$$

6. Par théorème de transert et la question précédente, on a donc

$$\begin{aligned}m &= E(Z^2) \\ &= \frac{1}{4}E(Y^4) \\ &= \frac{1}{4}E(X^4) \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Exercice 3

1. f est un endomorphisme symétrique réel, donc diagonalisable en base orthonormée.
2. (a) Notons λ_i la valeur propre associée à u_i.
   On décompose x sur la base $\mathcal{B}'$: $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$. On a alors
   $$\begin{aligned} \langle x, f(x)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u_i, \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i u_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$
   car $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ dès que $i \neq j$.

   (b) Par le calcul précédent, si $\langle x, f(x)\rangle = 0$, alors chaque x_i vaut 0, car les λ_i sont strictement positifs. Donc $x = 0$.

   (c) Par linéarité de f et bilinéarité du produit scalaire, φ est bilinéaire.
   Matriciellement, on a $\varphi(x,y) = {}^{\mathbf{t}}XMY = {}^{\mathbf{t}}(MX)Y = \langle f(x), y\rangle = \varphi(y,x)$. Donc φ est symétrique.
   De plus, on vient de voir que φ est définie positive.
   C'est donc un produit scalaire.
3. (a) Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de f est diagonale, de la forme $M = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
   Posons $N = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, sqrt\lambda_n)$, et g l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est N. Alors g est symétrique, ses valeurs propres (qui sont les éléments diagonaux de la matrice) sont strictement positives, et $g^2 = f$.

   (b) L'endomorphisme f est bijectif, car diagonalisable avec des valeurs propres strictement positives. On a donc
   $$ggf^{-1} = \mathrm{id}$$
   et donc g est bijective.

   (c) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. On traite la question matriciellement ; on note E_i la matrice de e_i.
   $$\begin{aligned} \varphi(g^{-1}(e_i), g^{-1}(e_j)) &= {}^{\mathbf{t}}(N^{-1}E_j)MN^{-1}E_i \\ &= {}^{\mathbf{t}}E_i\,{}^{\mathbf{t}}N^{-1}NE_j \quad \text{car } MN^{-1} = N \\ &= {}^{\mathbf{t}}E_i\,{}^{\mathbf{t}}NN^{-}1E_j \quad \text{car } N \text{ est symétrique} \\ &= \langle e_i, e_j\rangle \end{aligned}$$
   La famille $(g^{-1}(e_1), \dots, g^{-1}(e_n))$ est donc orthonormée pour φ.

Problème

Partie 1

1. Montrons-le par récurrence sur r. Si $r = 0$, alors $\binom{n}{r} = n \sim n$.
   Si pour un certain $r < n$, on a l'équivalent demandé, alors en utilisant
   $$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r+1}{r+1}\binom{n}{r-1},$$
   on trouve
   $$\binom{n}{r+1} \sim \frac{n}{r+1}\frac{n^r}{r!} \sim \frac{n^{r+1}}{(r+1)!}.$$

2. (a) Par croissances comparées, la limite cherchée est nulle.
   (b) D'après les deux questions précédentes, on a donc
   $$\binom{n}{r}x^n \sim \frac{n^r}{r!}x^n = \mathrm{o}(\frac{1}{n^2}.$$
   Par comparaison de séries à termes positifs, la série converge.
3. (a) On a $S_0 = \sum n = 0^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$.
   (b) On sait que pour tous n et r,
   $$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n+1}{r} + \binom{n}{r}.$$
   On a donc
   $$\begin{aligned}(1-x)S_{r+1} &= \sum_{n=r+1}^{\infty}\binom{n}{r+1}x^n - \sum_{n=r+1}^{\infty}\binom{n}{r+1}x^{n+1}\\ &= \sum_{n=r}^{\infty}\binom{n+1}{r+1}x^{n+1} - \sum_{n=r+1}^{\infty}\binom{n}{r+1}x^{n+1} \quad \text{par changement d'indice}\\ &= \sum_{n=r}^{\infty}\left(\binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1}\right)x^{n+1} + \binom{r}{r+1}x^{r+1}\\ &= xS_r\end{aligned}$$
   par la formule de Pascal (car $\binom{r}{r+1} = 0$).
   (c) Une récurrence immédiate nous donne donc
   $$S_r = \left(\frac{x}{1-x}\right)^r S_0,$$
   d'où le résultat demandé.
   (d) On en déduit donc
   $$\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n}{r}x^{n-r} = \frac{1}{x^r}S_r = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

Partie 2

1. (a) X peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. La formule des probabilités composées nous donne
   $$P(X=k) = P(\overline{D}_1 \cap \cdots \cap \overline{D}_k \cap D_{k+1}) = P(\overline{D}_1)P_{\overline{D}_1}(\overline{D}_2)\cdots P_{\overline{D}_1\cap\cdots\cap\overline{D}_k}(D_{k+1}) = (1-\alpha)^k\alpha.$$
   (b) On a donc $P(T=k) = P(X=k-1) = \alpha(1-\alpha)^{k-1}$. T suit donc une loi géométrique de paramètre α.
   On a donc $E(X) = E(T) - 1 = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}$.
   (c) Comme T admet une variance, X aussi, et $V(X) = V(T) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}$.
2. (a) Si on sait que $X = n$, alors on répète n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p. La loi de Y sachant $X = n$ est donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

(b) Y peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a donc par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{X=n}(Y=k)P(X=n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} (1-\alpha)^n \alpha \\
&= \alpha \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} ((1-p)(1-\alpha))^n \\
&= \alpha \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \frac{((1-p)(1-\alpha))^k}{(1-(1-p)(1-\alpha))^{k+1}} \\
&= \alpha \frac{(p(1-\alpha))^k}{(-\alpha p + p + \alpha)^{k+1}} \\
&= (1-\beta)^k \beta
\end{aligned}$$

où $\beta = \frac{\alpha}{-\alpha p + p + \alpha}$.

3. La variable $Y+1$ suit donc une loi géométrique de paramètre β, et donc Y admet une espérance qui vaut

$$E(Y) = \frac{1-\beta}{\beta} = \frac{p(1-\alpha)}{\alpha}.$$

De même, $Y+1$ admet une variance, et donc Y aussi, et

$$V(Y) = \frac{1-\beta}{\beta^2} = \frac{p(1-\alpha)(-\alpha+\alpha+p)}{\alpha^2}.$$

4. (a) Le gain est donc le nombre de manches gagnées moins le nombre de manches perdues : $G = Y - (X-Y) = 2Y - X$.

(b) On a donc, par linéarité de l'espérance,

$$E(G) = 2E(Y) - E(X) = \frac{2p(1-\alpha)}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{(2p-1)(1-\alpha)}{\alpha}.$$

(c) Par le théorème de transfert, on a donc

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} ijP(X=i \cap Y=j) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} ijP_{X=i}(Y=j)P(X=i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} iP(X=i) \sum_{j=0}^{i} jP_{X=i}(Y=j)
\end{aligned}$$

Or la loi de Y sachant $X=i$ est une loi binomiale de paramètres i et p, et donc $\sum_{j=0}^{i} jP_{X=i}(Y=j) = ip$.
Donc

$$E(XY) = \sum_{i=0}^{\infty} pi^2 P(X=i) = pE(X^2).$$

Par la formule de Huygens, $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}$, et on trouve donc

$$E(XY) = \frac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}.$$

(d) On a $V(G) = V(2Y - X) = 4V(Y) + V(X) - 4\,\mathrm{Cov}(X,Y)$. Il reste donc à calculer la covariance. Par la formule de Huygens,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{p(1-\alpha)}{\alpha^2}.$$

On obtient donc

$$V(G) = \frac{(1-\alpha)(4p^2(1+\alpha) + 4p(\alpha-1) + 1)}{\alpha^2}.$$

5. (a) On sait que $X + 1$ est géométrique, et on peut donc poser

```
X = grand(1,1,'geom',alpha) - 1
```

On sait que la loi de Y connaissant X est une loi binomiale, et on peut donc poser

```
Y = grand(1,1,'bin',X,p)
```

(b) Pour calculer le gain, il suffit de calculer

```
G = 2*Y - X;
disp(G);
```