ECS2 : Corrigé Mathématiques II 2015

Partie I. Probabilité de surpassement et espérance.

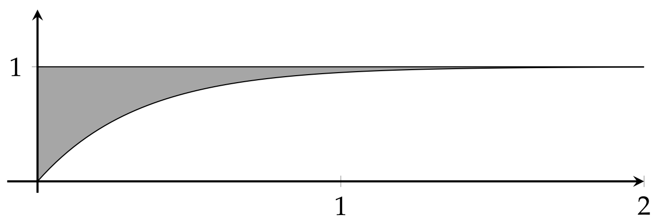
Commençons par noter que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_X(x) = 1 - F_X(x)$ où F_X est la fonction de répartition de X.

1. (a) On a donc pour tout réel x

$$S_X(x) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-\lambda x} & \text{sinon} \end{cases} .$$

L'intégrale cherchée est donc convergente, et vaut $\frac{1}{\lambda}$, qui est bien l'espérance de X.

(b) Voici l'allure de la courbe de F.



L'aire grisée représente l'intégrale de S_X, c'est-à-dire l'espérance de X.

2. (a) La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$, et au voisinage de ∞, $h(x) \sim x^{-2}$. Par comparaison avec une inégrale de Riemann, l'intégrale $\int_0^\infty h(x)\mathrm{d}x$ converge.

(b) On vérifie que $c = 1$ et $d = -1$ conviennent. On en déduit que la fonction $H : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \ln(x+1) - \ln(x+2)$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}^+$.

(c) La fonction f_0 est continue sur $\mathbb{R}$, sauf en 0. La fonction f_0 est positive, et son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge (question I2a). De plus

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f_0(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\ln(2)} \int_0^\infty h(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \left[\ln \frac{x+1}{x+2}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \ln(2) \\ &= 1\end{aligned}$$

3. (a) La fonction $x \mapsto x f_0(x)$ est équivalente à $\frac{1}{x \ln 2}$ au voisinage de ∞, et donc son intégrale diverge. La variable X n'admet donc pas d'espérance.

(b) On a donc pour tout $x \geqslant 0$

$$S_X(x) = \int_x^\infty f_0(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}\left[\ln \frac{x+1}{x+2}\right]_x^\infty = -\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{x+1}{x+2}$$

et $S_X(x) = 1$ si $x < 0$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$$\frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$$
et donc au voisinage de ∞,
$$\ln\frac{x+1}{x+2} = \ln\left(1 - \frac{1}{x+2}\right) \sim -\frac{1}{x+2} \sim -\frac{1}{x}$$
Finalement, au voisinage de ∞,
$$S_X(x) \sim \frac{1}{x\ln 2}.$$

(c) Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale de S_X sur $\mathbb{R}^+$ diverge.

4. (a) La fonction F_X est croissante, et donc S_X est décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, comme $\lim_\infty F_X = 1$, on a $\lim_\infty S_X = 0$.

(b) La fonction F_X est continue à droite, et donc S_X aussi. Elle est donc continue en 0 si et seulement si elle est continue à gauche en 0, *i.e.* si
$$\lim_{x\to 0^-} P(X > x) = P(X > 0).$$
Or X est à valeurs positives, et donc $P(X > x) = 1$ si $x < 0$. S_X est donc continue en 0 si et seulement si $P(X > 0) = 1$, et comme on sait déjà que $P(X \geqslant 0) = 1$, S_X est continue en 0 si et seulement si $P(X = 0) = 0$.

5. (a) On a alors pour tout $x > 0$,
$$S_X(x) = \int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t.$$
Comme f est continue sur $]0,\infty[$, par le théorème fondamental de l'intégration, S_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$ (et donc nécessairement continue sur cet intervalle).

(b) La fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $]0,1]$, et au voisinage de 0, $xf(x) = \mathrm{o}(f(x))$.
Comme $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge (c'est une fonction de densité), par comparaison d'intégrale de fonctions positives, l'intégrale de $xf(x)$ converge au voisinage de 0.
Finalement,
$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \text{ converge.}$$

(c) On va faire une intégration par parties : soit donc $0 < B < A$. On a alors
$$\begin{aligned}\int_B^A xf(x)\mathrm{d}x &= [xF_X(x)]_B^A - \int_B^A F_X(x)\mathrm{d}x \\ &= AF_X(A) - BF_X(B) - \int_B^A F_X(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$
On note que $F_X(x) = 1 - S_X(x)$ pour en déduire :
$$\int_B^A xf(x)\mathrm{d}x = A - AS_X(A) - BF_X(B) - (A-B) + \int_B^A S_X(x)\mathrm{d}x = -AS_X(A) - BF_X(B) + B + \int_B^A S_X(x)\mathrm{d}x.$$
Quand $B \to 0$, on retrouve bien le résultat.

(d) Supposons l'intégrale convergente. Alors
$$\int_0^A xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^A S_X(x)\mathrm{d}x - AS_X(A) \leqslant \int_0^A S_X(x)\mathrm{d}x$$
et donc l'intégrale $\int_0^\infty xf(x)\mathrm{d}x$ converge, et donc X admet une espérance.

(e) Supposons que X admet une espérance. Alors l'intégrale $\int_A^\infty xf(x)\mathrm{d}x$ converge. En notant que $-S_X$ est une primitive de f, on a par croissance de l'intégrale

$$\int_A^\infty xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_A^\infty Af(x)\mathrm{d}x = AS_X(A).$$

(f) On a déjà vu le sens réciproque dans la question I5d. Supposons donc que X admet une espérance. Alors par la question I5e, par encadrement des limites, $AS_X(A) \to 0$ quand $A \to \infty$. Donc, en passant à la limite dans l'égalité de I5c, donc obtient bien la convergence de $\int_0^\infty S_X(x)\mathrm{d}x$, et alors

$$\int_0^\infty S_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty xf(x)\mathrm{d}x = E(X).$$

6. (a) On a pour tout k,

$$S_X(k) = P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X = i).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} S_X(k) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X = i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\min(n,i-1)} P(X = i) \text{ en permutant les sommes} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (1 + \min(n, i-1))P(X = i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \min(n+1, i)P(X = i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} iP(X = i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} (n+1)P(X = i) \text{ en séparant selon la valeur du min} \\
&= \sum_{i=1}^{n} iP(X = i) + (n+1)P(X \geqslant n+1)
\end{aligned}$$

En rajoutant le terme $0P(X = 0)$ qui est nul, on retrouve le résultat.

(b) De même qu'en I5d, on écrit

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) \leqslant \sum_{k=0}^{n} S_X(k) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} S_X(k),$$

et donc comme la suite de gauche est croissante et majorée, elle converge. X admet donc une espérance.

(c) On vient de voir le sens réciproque. Supposons donc que X admet une espérance, *i.e.* que la série $\sum kP(X = k)$ converge.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{\infty} kP(X = k) &\geqslant \sum_{k=p}^{\infty} pP(X = k) \\
&= p \sum_{k=p}^{\infty} P(X = k) \\
&= pP(X \geqslant p+1)
\end{aligned}$$

En particulier, $pP(X \geqslant p+1) \to 0$ quand $p \to \infty$.

En reprenant le résultat que I6a, on retrouve bien en passant à la limite $n \to \infty$

$$\sum_{k=0}^{n} S_X(k) = \underbrace{nP(X \geqslant n+1)}_{\to 0} + \underbrace{P(X \geqslant n+1)}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)}_{\to E(X)}$$

Donc la série $\sum S_X(k)$ converge, et l'espérance de X est bien la somme de cette série.

(d) i. On va séparer le segment $[0, N[$ en $[0,1[\cup[1,2[\cup\cdots\cup[N-1,N[$. Par la relation de Chasles, on a donc

$$\int_0^N S_X(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1} S_X(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{N-1} S_X(k).$$

ii. Si X admet une espérance, alors la série $\sum S_X(k)$ converge, et par la question précédente, $\int_0^\infty S_X(x)\mathrm{d}x$ aussi. De plus, on a bien égalité entre les deux par I6c.

Partie II. Fonctions de distorsion et espérances corrigées : un exemple.

7. (a) La fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}$ avec limites respectives 0 et 1 en $-\infty$ et ∞, car c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue.

De plus, sa dérivée étant strictement positive, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de la bijection, elle est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

(b) La fonction ω_α est clairement continue et dérivable sur $]0,1[$ comme composée et somme de fonctions dérivables. Il reste à étudier la continuité en 0 et 1.

Quand $x \to 0$, on a $\Psi(x) \to -\infty$, et donc $\Psi(x) - \Psi(\alpha) \to -\infty$, et donc par continuité de Φ, $\omega_\alpha(x) \to 0$. Donc ω_α est continue en 0.

De la même façon, ω_α est continue en 1.

Finalement, ω_α est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

(c) Soit $x \in]0,1[$. Par dérivation de fonctions composées, on a donc

$$\omega_\alpha'(x) = \Psi'(x)\Phi'(\Psi(x) - \Psi(\alpha)).$$

Or la dérivée d'une fonction inverse nous donne

$$\Psi'(x) = \frac{1}{\Phi'(\Psi(x))}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha'(x) &= \frac{1}{\Phi'(\Psi(x))}\Phi'(\Psi(x) - \Psi(\alpha)) \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\Psi(x)^2/2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\Psi(x)-\Psi(\alpha))^2/2} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}(\Psi(x)^2 + \Psi(\alpha)^2 - 2\Psi(x)\Psi(\alpha)) + \frac{1}{2}\Psi(x)^2\right) \\
&= \exp\left(\Psi(\alpha)\Psi(x) - \frac{1}{2}\Psi(\alpha)^2\right)
\end{aligned}$$

(d) L'équation de la tangente est donnée par

$$y = \omega_\alpha'(\alpha)(x-\alpha) + \omega_\alpha(\alpha).$$

Or $\omega_\alpha'(\alpha) = \exp\left(\frac{1}{2}\Psi(\alpha)^2\right)$, et $\omega_\alpha(\alpha) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$. D'où l'équation de la tangente :

$$y = \exp\left(\frac{1}{2}\Psi(\alpha)^2\right)(x-\alpha) + \frac{1}{2}.$$

(e) Les fonctions Φ et Ψ étant croissante, ω_α est bien croissante sur $[0,1]$, et elle est continue par la question II7b. Il est clair que $\omega_\alpha(0) = 0$ et $\omega_\alpha(1) = 1$. Il reste donc à montrer qu'elle est concave. Par composition de fonction $\mathcal{C}^1$, ω_α est de classe $\mathcal{C}^2$, et pour tout $x \in]0,1[$,

$$\omega_\alpha''(x) = \Psi(\alpha)\Psi'(x)\exp\left(\Psi(\alpha)\Psi(x) - \frac{1}{2}\Psi(\alpha)^2\right) = \Psi(\alpha)\frac{1}{\Phi'(\Psi(x))}\exp\left(\Psi(\alpha)\Psi(x) - \frac{1}{2}\Psi(\alpha)^2\right).$$

Comme $\alpha \in]0,1/2[$, on a $\Psi(\alpha) < 0$, et donc ω_α'' est une fonction négative. La fonction ω_α est donc concave, et donc c'est une fonction de distorsion.

8. (a) Par le théorème de transfert, X admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-\mu)^2} \mathrm{d}t$$

converge, et sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-\mu)^2} \mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}((t-(\mu+1))^2-(2\mu+1))} \mathrm{d}t \\ &= e^{\mu+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

car l'intégrale restant est celle de la densité d'une loi normale de paramètre $\mu+1$ et 1.

Donc X admet une espérance, qui vaut $e^{\mu+\frac{1}{2}}$.

(b) Soit $x > 0$. On a alors

$$S_X(x) = P(X > x) = P(Y > \ln(x)) = P(Y - \mu > \ln(x) - \mu) = 1 - \Phi(\ln(x) - \mu) = \Phi(\mu - \ln(x)).$$

Donc en composant par Ψ,

$$\Psi(S_X(x)) = \mu - \ln(x).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(S_X(x)) &= \Phi(\mu - \ln(x) - \Psi(\alpha)) \\ &= 1 - \Phi(-\mu + \ln(x) + \Psi(\alpha)) \\ &= 1 - P(Y - \mu \leqslant -\mu + \ln(x) + \Psi(\alpha)) \\ &= 1 - P(Y \leqslant \ln(x) + \Psi(\alpha)) \\ &= P(Y > \ln(x) + \Psi(\alpha)) \\ &= P(X < xe^{\Psi(\alpha)})\end{aligned}$$

(c) On a donc

$$\omega_\alpha(S_X(x)) = S_{Xe^{-\Psi(\alpha)}}(x) = S_X(xe^{\Psi(\alpha)}).$$

Or X admet une espérance, et donc l'intégrale

$$\int_0^\infty S_X(x)\mathrm{d}x$$

converge (question I5f).

Or, par changement de variable affine, les intégrales

$$\int_0^\infty S_X(xe^{\Psi(\alpha)})\mathrm{d}x \text{ et } \int_0^\infty S_X(u)e^{-\Psi(\alpha)}\mathrm{d}u$$

sont de même natures, et égales en cas de convergence. Or la deuxième vaut $e^{-\Psi(\alpha)}E(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}-\Psi(\alpha)}$, et donc l'espérance de X corrigée par ω_α existe et vaut $e^{\mu+\frac{1}{2}-\Psi(\alpha)}$.

9. (a) La variable p contient un vecteur ligne $(0.02, 0.03, 0.04, \ldots, 0.97, 0.98)$.
   La fonction `cdfnor("X",0,1,p,1-p)` permet de calculer la valeur de $\Psi(p)$. La variable q contient donc les valeurs $\Psi(p) - \Psi(\alpha)$ pour toutes les valeurs contenues dans p ; finalement

$$q = (\Psi(0.02) - \Psi(\alpha), \Psi(0.03) - \Psi(\alpha), \cdots, \Psi(0.98) - \Psi(\alpha)).$$

   (b) La quatrième ligne calcule les valeurs de ω_α, et donc on peut l'écrire `wa = cdfnor("PQ",q,zeros(p),ones(p))`.

   (c) La fonction Ψ est croissante, et donc $\Psi(0.2) < \Psi(0.4)$, et par croissance de Φ, on en déduit que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\omega_{0.2}(x) > \omega_{0.4}(x),$$

   et donc la courbe pour $\alpha = 0.2$ est la plus haute des deux courbes.

   (d) Quand $x \to 0$, on a $\omega_\alpha(x) \to \infty$. On a donc une tangente à droite verticale en 0, d'équation $x = 0$. De même, on a une tangente horizontale à gauche en 1, d'équation $y = 1$.

   (e) Quand $\alpha \to 0$, on a pour tout $x \in]0, 1[$

$$\omega_\alpha(x) \to 1$$

   car $\Psi(\alpha) \to -\infty$. Donc quand α tend vers 0, la courbe de ω_α se confond avec la droite d'équation $y = 1$.

Partie III. Sous-additivité des espérances corrigées.

10. (a) La concavité de g nous donne directement le résultat.

   (b) En passant à la limite quand $n \to \infty$, par continuité de g, on obtient

$$g(x) \geqslant xg(1) + (1 - x)g(0) = x.$$

   (c) En notant que $b + \varepsilon - a > 0$, il suffit de choisir

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{b + \varepsilon - a}.$$

   Par concavité de g, on a donc

$$\begin{aligned} g(b) = g(\lambda a + (1 - \lambda)(b + \varepsilon)) &\geqslant \lambda g(a) + (1 - \lambda)g(b + \varepsilon) \\ g(a + \varepsilon) = g((1 - \lambda)a + \lambda(b + \varepsilon)) &\geqslant (1 - \lambda)g(a) + \lambda g(b + \varepsilon) \end{aligned}$$

   En ajoutant les deux inégalités, on obtient

$$g(b) + g(a + \varepsilon) \geqslant g(a) + g(b + \varepsilon),$$

   et on en déduit le résultat souhaité.

11. (a) On sait que $E_g(X)$ existe, et donc que l'intégrale

$$\int_0^\infty g(S_X(x))\mathrm{d}x$$

   converge. Or on a vu que pour tout x, $g(x) \geqslant x$, et donc pour tout $x > 0$, $g(S_X(x)) \geqslant S_X(x)$.
   Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^\infty S_X(x)\mathrm{d}x$ converge, et donc $E(X)$ existe et $E(X) \leqslant E_g(X)$ par [1].

   (b) Si X est certaine, alors elle est presque sûrement égale à son espérance. Mais alors pour tout x,

$$S_X(x) = P(X > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant E(X) \\ 0 & \text{si } X > E(X) \end{cases}.$$

   Comme $g(1) = 1$, on a donc $S_X(x) = g(S_X(x))$ pour tout x, et donc l'égalité des intégrales, puis des espérances.

(c) Notons que pour tout x,

$$S_{rX+s}(x) = P(rX+s > x) = P(X > \frac{x-s}{r}) = S_X(\frac{x-s}{r}).$$

On a donc, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(S_{rX+s}(x))\mathrm{d}x &= \int_0^\infty g(S_X(\frac{x-s}{r}))\mathrm{d}x \\
&= \int_{-s/r}^\infty g(S_X(u))r\mathrm{d}u \text{ par changement de variable affine } x = ru+s \\
&= r\int_{-s/r}^0 g(S_X(u))\mathrm{d}u + r\int_0^\infty g(S_X(u))\mathrm{d}u \\
&= s + rE_g(X)
\end{aligned}$$

car entre $-s/r$ et 0, $S_X(u) = 1$, et donc la fonction à intégrer vaut 1.
Finalement, $E_g(rX+s)$ existe et vaut $s + rE_g(X)$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $P(T > x) \leqslant P(W > X)$ car $T \leqslant W$ presque sûrement, et donc

$$g(S_T(x)) \leqslant g(S_W(x))$$

par croissance de g. Par croissance de l'intégrale, on a, sous réserve de convergence, $E_g(T) \leqslant E_g(W)$.

12. La fonction S_Y n'est non nulle que sur un segment, et il en est donc de même pour $g \circ S_Y$, car $g(0) = 0$. L'intégrale de cette dernière fonction est donc nécessairement convergente.

De plus, on sait que presque sûrement, $0 \leqslant Y \leqslant B$, et donc $0 \leqslant X+Y \leqslant X+B$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_{X+Y}(x) \leqslant S_{X+B}(x),$$

et l'intégrale de la fonction de droite converge par III11c, et donc $E_g(X+Y)$ existe.

De plus, comme $P(0 \leqslant Y \leqslant B) = 1$, par III11d, on a $E_g(Y) \leqslant E_g(B) = B$, et comme $P(0 \leqslant X+Y \leqslant X+B) = 1$, on a aussi $E_g(X+Y) \leqslant E_g(X+B) = E_g(X) + B$.

13. (a) Si $n = 0$, alors U est une variable aléatoire certaine égale à 0, et donc $E_g(U) = E(U) = 0$. Par la question III12, on a donc

$$E_g(X+Y) \leqslant E_g(X) + 0 = E_g(X) + E_g(U).$$

(b) i. Par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
S_{X+Z}(x) &= P^*(X+Z > x)p + (1-p)P_{Z=0}(X+Z > x) \\
&= (1-p)P_{Z=0}(X > x) + pS^*_{X+Z}(x)
\end{aligned}$$

ii. On a, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
S_X(x) &= P(X > x) \\
&= pP^*(X > x) + (1-p)P_{Z=0}(X > x) \\
&= pS^*_X(x) + (1-p)P_{Z=0}(X > x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
S_Z(x) &= P(Z > x) \\
&= pP^*(Z > x) + (1-p)P_{Z=0}(Z > x) \\
&= pS^*_Z(x) \text{ car } x > 0
\end{aligned}$$

iii. Appliquons le résultats de III10c avec $a = pS_X^*(x)$, $b = pS_{X+Z}^*(x)$ et $\varepsilon = (1-p)P_{Z=0}(X > x)$. On a bien $X \leqslant X + Z$, et donc par un raisonnement déjà fait, $a \leqslant b$. Le cas d'égalité est trivial, on traite donc le cas $a < b$:

$$g(b+\varepsilon) - g(a+\varepsilon) = g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) \leqslant g(b) - g(a) = g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x)).$$

Il suffit de soustraire $g(S_Z(x)) = g(pS_Z^*(x))$ pour obtenir l'inégalité demandée.

(c) La fonction h est bien continue, croissante sur $[0,1]$ et concave sur $]0,1[$ car g l'est, et $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$.
L'hypothèse de récurrence appliquée à $Z^* = Z - 1$ et à la probabilité P^* (on a bien $P^*(Z^* \in [\![0,n]\!]) = 1$) nous donne donc,

$$E_h^*(X + Z^*) \leqslant E_h^*(X) + E_h^*(Z^*),$$

où E^* est l'espérance pour la probabilité P^*.
Mais par la question III11c, $E_h^*(X + Z - 1) = E_h^*(X + Z) - 1$ et de même $E_h^*(XZ1) = E_h^*(Z) - 1$, d'où

$$E_h^*(X + Z) \leqslant E_h^*(X) + E_h^*(Z).$$

Il suffit de remplacer l'espérance corrigée par sa définition pour obtenir l'inégalité voulue.

(d) En multipliant l'inégalité précédente par $g(p) > 0$, et en rassemblant les termes par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^\infty (g(pS_{X+Y}^*(x)) - g(pS_X^*(x)) - g(pS_Z^*(x)))\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

Mais par croissance de l'intégrale appliquée au résultat de III13biii, on obtient donc

$$\int_0^\infty (g(S_{X+Y}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x)))\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

et donc l'inégalité demandée.
Par théorème de récurrence, on a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute probabilité P, pour toute fonction de distorsion g et toute variable X admettant une espérance corrigée et pour toute variable U à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ presque sûrement, on a bien

$$E_g(X + Z) \leqslant E_g(X) + E_g(Z).$$

14. (a) Par croissance de la partie entière, on a presque sûrement $0 \leqslant \lfloor nY(\omega) \rfloor \leqslant \lfloor nB \rfloor \leqslant n\lfloor B \rfloor$, puis $Y_n n[0, \lfloor B \rfloor]$ presque sûrement. La question 12 prouve donc l'existence des deux espérances corrigées.
De plus, nY_n est à valeurs entières et bornées, et par la question III13, on a donc

$$E_g(nX + nY_n) \leqslant E_g(nX) + E_g(nY_n),$$

puis en utilisant la question III11c et en divisant par n, on a l'inégalité voulue.

(b) Soit $x > 0$. On a par définition de la partie entière,

$$nY(\omega) - 1 < \lfloor nY(\omega) \rfloor \leqslant nY(\omega),$$

puis en divisant par n,

$$Y_n(\omega) \leqslant Y(\omega).$$

Donc $Y_n \leqslant Y$ presque sûrement, donc $[Y_n > x] \subseteq [Y > x]$. On a alors $S_{Y_n} \leqslant S_Y$, et par croissance de g, puis croissance de l'intégrale,

$$E_g(Y_n) \leqslant E_g(Y).$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un simple changement de variable $x \mapsto x + \frac{1}{n}$ permet de prouver la première égalité. Toujours par définition de la partie entière, on a

$$nY(\omega) - 1 < \lfloor nY(\omega) \rfloor \leqslant nY(\omega),$$

et donc

$$Y(\omega) - \frac{1}{n} < Y_n(\omega).$$

On en déduit que $S_{X+Y}(x + \frac{1}{n}) = P(X + Y - \frac{1}{n} > x) \leqslant P(X + Y_n > x) = S_{X+Y_n}(x)$, puis on conclut par croissance de g et de l'intégrale.

(d) Avec les questions III14a et III14b, on a donc

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} g(S_{X+Y}(x))\mathrm{d}x \leqslant E_g(X) + E_g(Y),$$

puis en passant à la limite $n \to \infty$, on obtient alors

$$E_g(X + Y) \leqslant E_g(X) + E_g(Y).$$