ECS2 : Corrigé Ecricome 2007

Exercice 1

1. On connaît les développements limités au voisinage de 0
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) \text{ et } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2).$$
On en déduit donc
$$\begin{aligned}\ln(2-e^x) &= \ln(2-1-x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2))\\ &= \ln(1-(x+\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)))\\ &= -(x+\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)) - \frac{(x+\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2))^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\\ &= -x - x^2 + \mathrm{o}(x^2)\end{aligned}$$

2. (a) Soit $k \geqslant 2$. On a alors $e^{1/k} \leqslant e^{1/2} = \sqrt{e}$. Or on sait que $e < 4$, et donc $\sqrt{e} < 2$. Donc $e^{1/k} < 2$, puis $2 - e^{1/k} > 0$.
De plus, $\frac{1}{k} > 0$, et donc $e^{1/k} > 1$. Donc $2 - e^{1/k} < 1$.
On a bien $2 - e^{1/k} \in]0, 1[$.
   (b) Le logarithme prend des valeurs négatives entre 0 et 1, et donc
$$\forall k \geqslant 2,\ \ln(2-e^{1/k}) < 0.$$
   (c) D'après le développement limité de la question 1, on a quand x tend vers 0
$$\ln(2-e^x) = -x - x^2 + \mathrm{o}(x^2) = -x + \mathrm{o}(x) \sim -x.$$
Donc, quand $k \to \infty$, $\ln(2-e^{1/k}) \sim -\frac{1}{k}$. Par comparaison de séries à termes de signe constant avec une série de Riemmann, la série V_n diverge :
$$\lim_{n\to\infty} V_n = -\infty.$$
Par continuité de l'exponentielle, $\lim u_n = 0$.

3. (a) Soit $n \geqslant 2$. Alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\Big(\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-1/k)\Big) &= V_n - \sum_{k=2}^{n}\ln(\frac{k-1}{k})\\ &= V_n - \sum_{k=2}^{n}\ln(k-1)-\ln(k)\\ &= V_n + \ln(n)\\ &= \ln(u_n) + \ln(n)\\ &= \ln(nu_n)\end{aligned}$$

(b) Faisons un développement limité : on sait que $\ln(1-\frac{1}{k}) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2})$. Donc

$$\begin{aligned}
\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-1/k) &= -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + o(\frac{1}{k^2}) + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2}) \\
&= -\frac{1}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2}) \\
&\sim -\frac{1}{2k^2}
\end{aligned}$$

(c) Par comparaison de séries à termes de signe constant avec une série de Riemmann, la série $\sum_{k=2}^{n} \left(\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-1/k)\right)$ converge, vers une limite $L \in \mathbb{R}$.
Mais

$$u_n = \frac{1}{n} \exp\left(\sum_{k=2}^{n} \left(\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-1/k)\right)\right),$$

et donc quand $n \to \infty$,

$$u_n \sim \frac{e^L}{n}.$$

On retrouve le résultat demandé en posant $K = e^L > 0$.
Par comparaison de séries à termes positifs, la série Σu_n diverge.

4. (a) La suite (V_n) est décroissante car tous les $\ln(2-e^{1/k})$ sont négatifs (question 2b). Donc, par croissance de l'exponentielle, (u_n) est décroissante.

(b) Soit $n \geqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned}
S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \\
&= u_{2n+2} - u_{2n+1} \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

La suite (S_{2n}) est donc décroissante. De même,

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0,$$

et donc (S_{2n+1}) est croissante.
De plus,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = -u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

par la question 3c.
Les deux suites sont donc adjacentes.

(c) La suite (S_n) est donc convergente, *i.e.* la série de terme générale $(-1)^n u_n$ converge.

Exercice 2

1. *On note que c'est maintenant une question de cours.*
Calculons explicitement les coefficients diagonaux de ${}^{\mathbf{t}}AB$:

$$\begin{aligned}
({}^{\mathbf{t}}AB)_{ii} &= \sum_{k=1}^{n} ({}^{\mathbf{t}}A)_{ik} B_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{ki} B_{ki}
\end{aligned}$$

Donc
$$\mathrm{Tr}({}^{\mathbf{t}}AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}B_{ki}.$$

Vérifions que φ est un produit scalaire :

- φ est clairemant bilinéaire par linéarité de la transposée et de la trace.
- Pour tous A, B, on a bien
$$\mathrm{Tr}({}^{\mathbf{t}}AB) = \mathrm{Tr}({}^{\mathbf{t}}({}^{\mathbf{t}}BA)) = \mathrm{Tr}({}^{\mathbf{t}}BA).$$
  Donc φ est symétrique.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a
$$\begin{aligned}\varphi(A, A) &= \mathrm{Tr}({}^{\mathbf{t}}AA)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}^2\\ &\geqslant 0\end{aligned}$$
  avec égalité si et seulement si $\forall k, i \in [\![1, n]\!]$, $A_{ki} = 0$, *i.e.* si et seulement si $A = 0$. Donc φ est définie positive.

Finalement, φ est bien un produit scalaire.

2. (a) La matrice ${}^{\mathbf{t}}AA$ est symétrique réelle, et donc diagonalisable en base orthonormée : il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que
$${}^{\mathbf{t}}P({}^{\mathbf{t}}AA)P = D.$$

(b) On a d'une part
$${}^{\mathbf{t}}X\,{}^{\mathbf{t}}AAX = {}^{\mathbf{t}}X\lambda X = \lambda\,{}^{\mathbf{t}}XX = \lambda\|X\|^2.$$
D'autre part,
$${}^{\mathbf{t}}X\,{}^{\mathbf{t}}AAX = {}^{\mathbf{t}}(AX)AX = \|AX\|^2.$$
Finalement, comme X est non nul, on a
$$\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0.$$

(c) Commençons par noter que la trace est invariante par changement de base : si $C, D, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec Q inversible et $\mathbb{C} = Q^{-1}DQ$, alors
$$\mathrm{Tr}(C) = \mathrm{Tr}(Q^{-1}DQ) = \mathrm{Tr}(Q^{-1}QD) = \mathrm{Tr}(D).$$
On a alors
$$N(A)^2 = \varphi(A, A) = \mathrm{Tr}({}^{\mathbf{t}}AA) = \mathrm{Tr}(D),$$
$$N(B)^2 = \mathrm{Tr}({}^{\mathbf{t}}BB) = \mathrm{Tr}(S),$$
et
$$\mathrm{Tr}(SD) = \mathrm{Tr}({}^{\mathbf{t}}PB\,{}^{\mathbf{t}}BP\,{}^{\mathbf{t}}P\,{}^{\mathbf{t}}AAP) = \mathrm{Tr}(B\,{}^{\mathbf{t}}B\,{}^{\mathbf{t}}AA) = \mathrm{Tr}({}^{\mathbf{t}}(AB)AB) = N(AB)^2.$$

(d) On note que S est symétrique, et donc $\mathrm{Tr}(SD) = \varphi(S, D)$. D'après la question 1, on a donc
$$\mathrm{Tr}(SD) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{ki}D_{ki} = \sum_{i=1}^{n} s_{ii}\lambda_i,$$
car les coefficients non diagonaux de D sont nuls.

(e) Calculons

$$\begin{aligned}\|{}^{\mathbf{t}}BPE_i\|^2 &= {}^{\mathbf{t}}({}^{\mathbf{t}}BPE_i)\,{}^{\mathbf{t}}BPE_i \\ &= {}^{\mathbf{t}}E_i\,{}^{\mathbf{t}}PB\,{}^{\mathbf{t}}BPE_i \\ &= {}^{\mathbf{t}}E_iSE_i\end{aligned}$$

On a d'autre part

$${}^{\mathbf{t}}E_iSE_i = {}^{\mathbf{t}}E_i \begin{pmatrix} s_{1i} \\ \vdots \\ s_{ni} \end{pmatrix} = s_{ii}.$$

Donc pour tout i, $s_{ii} \geqslant 0$.

(f) On a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^n s_{jj}\right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i s_{jj} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} + \sum_{j=1, j\neq i}^n \lambda_i s_{jj}\end{aligned}$$

Or on a vu que pour tous i, j, $\lambda_i \geqslant 0$ (question 2b) et $s_{jj} \geqslant 0$ (question 2e). Donc

$$\sum_{j=1, j\neq i}^n \lambda_i s_{jj} \geqslant 0.$$

Finalement,

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^n s_{jj}\right) \geqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii}.$$

Avec les questions 2c et 2d, en notant que toutes les valeurs sont positives, on retrouve bien

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

Problème

Préliminaire

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par la formule de Huygens, on a

$$\begin{aligned}V(\lambda X + Y) &= E((\lambda X + Y)^2) - E(\lambda X + Y)^2 \\ &= E(\lambda^2 X^2 + E(Y^2) + E(2\lambda XY)) - \lambda^2 E(X)^2 - E(Y)^2 - 2\lambda E(XY) \\ &= \lambda^2(E(X^2) - E(X)^2) + E(Y^2) - E(Y)^2 + 2\lambda(E(XY) - E(X)E(Y)) \\ &= \lambda^2 V(X) + V(Y) + 2\lambda \operatorname{Cov}(X, Y)\end{aligned}$$

2. (a) La variance étant toujours positive, le trinôme du second degré (qui en est bien un car $V(X) \neq 0$) en λ $\lambda^2 V(X) + V(Y) + 2\lambda \operatorname{Cov}(X, Y)$ garde un signe constant. Son discriminant est donc négatif :

$$4\operatorname{Cov}(X, Y)^2 - 4V(X)V(Y) \leqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Cov}(X, Y)^2 \leqslant V(X)V(Y).$$

(b) On a égalité si et seulement si le discriminant du trinôme précédent est nul, *i.e.* si et seulement si le trinôme a une unique racine $a \in \mathbb{R}$. On a alors $V(aX + Y) = 0$, et donc $aX + Y$ est constant presque sûrement, *i.e.* il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $Y = -aX + b$ presque sûrement.
Réciproquement, si $Y = -aX + b$ presque sûrement, alors l'égalité est vérifiée.

Partie I : Étude d'une fonction de deux variables

1. La fonction $(a,b) \mapsto \frac{1}{b^n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,A[\times]0,\infty[$ car c'est un quotient de fonction $\mathcal{C}^1$ donc le dénominateur ne s'annule pas.

   De même, la fonction $(a,b) \mapsto -\frac{1}{b}(-na+S)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,A[\times]0,\infty[$, et comme $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $(a,b) \mapsto \exp(-\frac{1}{b}(-na+S))$ esr de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert considéré.

   Par produit de fonctions $\mathcal{C}^1$, L_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]0,A[\times]0,\infty[$.

   Si L_n admettait un extremum local sur l'ouvert considéré, alors ça serait un point critique. Soit $(a,b) \in]0,A[\times]0,\infty[$ un point critique de L_n. Alors

   $$\partial_1 L_n(a,b) = \frac{1}{b^n}\frac{n}{b}e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} = 0$$

   ce qui est impossible car l'exponentielle est toujours strictement positive, et $\frac{n}{b^{n+1}}$ ne peut pas s'annuler (n est non nul).

   L_n n'a donc pas de point critique, et donc pas d'extremum local sur $]0,A[\times]0,\infty[$.

2. Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.

   La fonction $a \mapsto -\frac{1}{b}(-na+S)$ est strictement croissante, et par stricte croissance de l'exponentielle, la fonction $a \mapsto L_n(a,b)$ est strictement croissante sur $[0,A]$.

   Donc, si $a < A$, $L_n(a,b) < L_n(A,b)$.

   Si $a > A$, alors $L_n(a,b) = 0$ et $L_n(A,b) > 0$. Donc $L_n(a,b) < L_n(A,b)$.

3. g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$,

   $$g'(b) = \frac{-n}{b^{n+1}}e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)} - \frac{-nA+S}{b^{n+2}}e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)} = \frac{-nb-nA+S}{b^{n+2}}e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}.$$

   $g'(b)$ est donc du signe de $-nb-nA+S$, c'est-à-dire strictement positif si $b < \frac{S-nA}{n}$ et strictement négatif si $b > \frac{S-nA}{n}$.

   $\frac{S-nA}{n}$ est bien dans $\mathbb{R}_+^*$ car $S > nA$, et donc g admet un maximum absolu en $\frac{S-nA}{n}$, qui est unique.

4. On a vu en question 2 que si $a \neq A$, alors $L_n(a,b) < L_n(A,b) \leqslant g(b_0) = L_n(A,b_0)$, et donc (a,b) ne peut pas être un maximum absolu.

   Si $a = A$, alors $Ł_n(a,b) = g(b) \leqslant g(b_0) = L_n(a,b_0)$.

   Finalement, L_n atteint un maximum global en (A,b_0). Tout maximum global est atteint pour l'unique valeur de a A, et pour l'unique valeur de b b_0, et donc ce point est unique.

Partie II : Étude d'une loi

1. La fonction $f_{a,b}$ est continue, sauf éventuellement en un nombre fini de point, positive, et

   $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_{a,b}(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{b}\int_a^{\infty} e^{-\frac{x-a}{b}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{b}\left[-be^{-\frac{x-a}{b}}\right]_a^{\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

   Donc $f_{a,b}$ est bien une densité de probabilité.

2. Notons F la fonction de répartition de X.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \leqslant a$, alors $F(x) = 0$, car car X prend presque sûrement des valeurs supérieures à a.

   Si $x > a$, alors

   $$F(x) = \int_a^x e^{-\frac{t-a}{b}}\mathrm{d}t = 1 - e^{-\frac{x-a}{b}}.$$

3. Calculons la fonction de répartition F_Y de Y.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors si $x \leqslant 0$, alors $x + a \leqslant a$ et donc
$$F_Y(x) = P(X - a \leqslant x) = F(x+a) = 0.$$
Si $x > 0$, alors
$$F_Y(x) = P(X - a \leqslant x) = F(x+a) = 1 - e^{-\frac{x}{b}}.$$
On reconnaît la loi d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$.
On a donc $E(Y) = b$, et donc par linéarité, $E(X) = E(Y) + a = a + b$.
De plus, $V(Y) = b^2$, et donc $V(X) = V(Y + a) = V(Y) = b^2$.

4. On a déjà vu que X admet des moments d'ordre 1 et 2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$; on suppose que X admet un moment d'ordre $p - 1$.
Alors sous réserve d'existence, par le théorème de transfert, on a
$$E(X^p) = \frac{1}{b}\int_a^{\infty} x^p e^{-\frac{x-a}{b}}\,\mathrm{d}x$$
Soit $A > a$. On a, par intégration par parties,
$$\begin{aligned}\frac{1}{b}\int_a^A x^p e^{-\frac{x-a}{b}}\,\mathrm{d}x &= \left[-x^p e^{-\frac{x-a}{b}}\right]_a^A + p\int_a^A x^{p-1}e^{-\frac{x-a}{b}}\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{-A^p e^{-\frac{A-a}{b}}}_{\xrightarrow[A\to\infty]{}0} + a^p + \underbrace{p\int_a^A x^{p-1}e^{-\frac{x-a}{b}}\,\mathrm{d}x}_{\xrightarrow[A\to\infty]{} pbE(X^{p-1})}\end{aligned}$$
Finalement, $E(X^p)$ existe, et
$$E(X^p) = a^p + bpE(X^{p-1}).$$
Par récurrence, cette relation reste vraie pour tout p, et X admet des moments de tout ordre.

5. (a) Calculons la fonction de répartition de $W = -b\ln(1-U) + a$: soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}P(W \leqslant x) &= P(-b\ln(1-U) + a \leqslant x) \\ &= P(\ln(1-U) \geqslant -\frac{x-a}{b}) \\ &= P(1 - U \geqslant e^{-\frac{x-a}{b}}) \\ &= P(U \leqslant 1 - e^{-\frac{x-a}{b}}) \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x-a}{b}} & \text{si } 1 - e^{-\frac{x-a}{b}} \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$
Or
$$\begin{aligned}1 - e^{-\frac{x-a}{b}} \in [0,1[&\Leftrightarrow e^{-\frac{x-a}{b}} \in]0,1] \\ &\Leftrightarrow -\frac{x-a}{b} \in]-\infty, 0] \\ &\Leftrightarrow x \geqslant a\end{aligned}$$
Finalement, on a bien
$$P(W \leqslant x) = F(x),$$
et donc $W = -b\ln(1-U) + a \hookrightarrow \mathcal{E}(a,b)$.

(b) Pour simuler une loi $\mathcal{E}(a,b)$, il suffit donc de simuler une loi uniforme sur $[0,1[$ et de lui appliquer la transformation précédente :

```
function z=tirage(a,b)
    x=rand();
    z=-b*log(1-x)+a;
endfunction
```

0.1 Partie III : Estimation des paramètres a et b

1. ```
   function [S,Y] = simule(a,b,n)
       X=tirage(a,b);
       S=X;
       Y=X;
       for i=1:n
           X=tirage(a,b);
           S=S+X;
           Y=min(Y,X);
       end
   endfunction
   ```

2. Par linéarité de l'espérance, il est clair que $E(S_n) = nE(X_1) = n(a+b)$.
   Par indépendance des X_i, on a $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = nb^2$.

3. Posons $T_n = X_1 - a + X_2 - a + \cdots + X_n - a$.
   D'après la question $II3$, on sait que tous les $X_i - a$ suivent une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$, et sont indépendantes.
   Donc les $\frac{1}{b}(X_i - a)$ suivent une loi exponentielle de paramètre 1, *i.e.* une loi gamma de paramètre 1.
   Donc $\frac{1}{b}T_n \hookrightarrow \gamma(n)$.
   Cherchons la fonction de réparition de T_n : soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} P(T_n \leqslant x) &= P(\frac{1}{b}T_n \leqslant \frac{x}{b}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{x/b} t^{n-1} e^{-t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

   On a $S_n = T_n + na$, et on peut donc trouver la fonction de répartition de S_n : soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \leqslant na$, alors $x - na \leqslant 0$ et donc $P(S_n \leqslant x) = P(T_n \leqslant x - na) = 0$.
   Si $x > na$, alors

$$\begin{aligned} P(S_n \leqslant x) &= P(T_n \leqslant x - na) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\frac{x-na}{b}} t^{n-1} e^{-t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Cette fonction est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en na, et donc S_n est à densité, de densité (en utilisant une dérivée de fonctions composées) :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} \dfrac{1}{b} \left(\dfrac{x-na}{b}\right)^{n-1} e^{-\frac{x-na}{b}} & \text{si } x \in]na, \infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{b^n (n-1)!} (x-na)^{n-1} e^{-\frac{x-na}{b}} & \text{si } x \in]na, \infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

4. On cherche la fonction de répartition d'un minimum : Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < a$, alors il est clair que $P(Y_n \leqslant a) = 0$. Supposons donc $x \geqslant a$.
   ```

On a

$$\begin{aligned}
P(Y_n \leqslant x) &= 1 - P(Y_n > x) \\
&= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i > x\right) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F(x)) \text{ par indépendance} \\
&= 1 - \left(e^{-\frac{x-a}{b}}\right)^n \\
&= 1 - e^{-\frac{x-a}{\frac{b}{n}}}
\end{aligned}$$

Donc Y_n suit une loi exponentielle de paramètres a et $\frac{b}{n}$. On a donc $E(Y_n) = a + \frac{b}{n}$ et $V(Y_n) = \frac{b^2}{n^2}$.

5. (a) Le biais de Y_n en tant qu'estimateur de a est donc $b(Y_n) = E(Y_n) - a = \frac{b}{n}$.
Par la formule de décomposition biais-variance du risque quadratique, on a

$$r(Y_n) = V(Y_n) + b(Y_n)^2 = 2\frac{b^2}{n^2}.$$

(b) Si une variable Z admet un moment d'ordre 2, alors l'inégalité de Markov peut s'écrire pour tout $a > 0$:

$$P(|Z| \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a^2}E(Z^2).$$

Le biais de Y_n tend bien vers 0, et donc (Y_n) est une suite d'estimateurs de a asymptotiquement sans biais.
De plus, son risque quadratique tend vers 0, et donc elle est convergente.

6. (a) On a, par linéarité,

$$E(Z_n) = \frac{1}{n}E(S_n) - E(Y_n) = \frac{1}{n}n(a+b) - a - \frac{b}{n} = \frac{n-1}{n}b.$$

Donc le biais de Z_n comme estimateur de b est

$$b(Z_n) = E(Z_n) - b = -\frac{b}{n}.$$

(b) D'après le préliminaire,

$$V(Z_n) = V(S_n/n) + V(Y_n) - 2\operatorname{Cov}(S_n/n, Y_n) = \frac{1}{n^2}nb^2 + \frac{b^2}{n^2} - \frac{2}{n}\operatorname{Cov}(S_n, Y_n).$$

Après simplification, on retrouve bien le résultat demandé.

(c) D'après le préliminaire, on sait que

$$|\operatorname{Cov}(S_n, Y_n)| \leqslant \sqrt{V(S_n)V(Y_n)} = \frac{b^2}{\sqrt{n}}.$$

Donc

$$V(Z_n) \leqslant \frac{2b^2}{n^2} + \frac{2b^2}{n\sqrt{n}} + \frac{b^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(Z_n) est clairement asymptotiquement sans biais, et donc $r(Z_n) = V(Z_n) + b(Z_n)^2 \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc (Z_n) est convergente.

7. (a) On a donc, si tous les x_i sont supérieurs à a :

$$\begin{aligned} L(a,b) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b} e^{-\frac{x_i - a}{b}} \\ &= \frac{1}{b^n} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} -\frac{x_i - a}{b} \right) \\ &= \frac{1}{b^n} \exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i - na}{b} \right) \end{aligned}$$

On retrouve bien la fonction L_n avec $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $A = \min(x_1, \ldots, x_n)$.

(b) L'estimation de a par Y_n en $(x_1, \ldots, x_n)$ est $\min(x_1, \ldots, x_n) = A$.
L'estimation de b par Z_n en $(x_1, \ldots, x_n)$ est $\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) - \min(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} S - A$.
Donc les estimations de a et b par Y_n et Z_n correspondent aux coordonnées du point où L_n atteint son maximum.