ECS2 : Corrigé EDHEC 1999

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction g_n est dérivable sur $N, \infty[$, et
   $$\forall x \in [n, \infty[,\ g_n'(x) = e^{x^2}.$$
   La fonction g_n' est donc positive strictement, et g_n est donc strictement croissante sur $[n, \infty[$.
   (b) L'intégrale $\displaystyle\int_n^\infty e^{t^2} \mathrm{d}t$ est divergente, car $\frac{1}{t} = o(e^{t^2})$ par croissance comparée. Comme g_n est croissante, nécessairement, $\lim_{x \to \infty} g_n(x) = \infty$.
   (c) La fonction g_n est dérivable donc continue, et est strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $[n, \infty[$ vers $[0, \infty[$. En particulier, il existe un unique antécédent x_n de 1 par g_n.
2. (a) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant n$. Par théorème de comparaison de limites, $x_n \to \infty$.
   (b) Pour tout $t \in [n, x_n]$, on a
   $$e^{n^2} \leqslant e^{t^2} \leqslant e^{x_n^2}.$$
   Par croissance de l'intégrale, on obtient donc
   $$\int_n^{x_n} e^{n^2} \mathrm{d}t \leqslant g_n(x_n) \leqslant \int_n^{x_n} e^{x_n^2} \mathrm{d}t,$$
   et donc
   $$e^{n^2}(x_n - n) \leqslant 1 \leqslant e^{x_n^2}(x_n - n).$$
   Par décroissance de la fonction inverse, et comme $x_n - n \geqslant 0$, on retrouve bien
   $$e^{-x_n^2} \leqslant x_n - n \leqslant e^{-n^2}.$$
3. (a) On a donc $0 \leqslant x_n - n \leqslant e^{-n^2}$. Par théorème d'encadrement des limites, on a donc $\lim u_n = 0$.
   (b) De la même façon, $0 \leqslant nu_n \leqslant ne^{-n^2}$. Par croissances comparées, $ne^{-n^2} \to 0$, et donc par théorème d'encadrement des limites, $nu_n \to 0$.
   (c) On a vu en 2b que
   $$x_n \leqslant e^{-n^2} + n,$$
   et donc $x_n^2 \leqslant e^{-2n^2} + n^2 + 2ne^{-n2}$. Comme $x_n^2 - n^2 \geqslant 0$, par théorème d'encadrement des limites, $x_n^2 - n^2 \to 0$.
   Donc, comme par 2b, on a
   $$e^{n^2 - x_n^2} \leqslant e^{n^2}(x_n - n) \leqslant 1,$$
   par théorème d'encadrement des limites $e^{n^2}(x_n - n) \to 1$, et donc on retrouve l'équivalent demandé.

Exercice 2

1. (a) Après le premier tirage, il reste $n-1$ boules, après le troisième tirage, $n-2$ boules, *etc.* Après le $2k-1$-ième tirage, il reste donc $n-k$ boules, et il faut donc $2n-1$ tirages pour vider l'urne.

   (b) Avant le $2j$-ième tirage, on a fait j tirages de rang impair. On a donc retiré j boules, et il en reste donc $n-j$ dans l'urne.

   Le $2j$-ième tirage ne retirant pas de boules, il en reste toujours $n-j$ avant le $2j+1$-ième tirage.

2. (a) Au premier et au deuxième tirage, il y a 1 boule noire pour n boules au total :

$$P(X_1 = 1) = P(X_2 = 1) = \frac{1}{n}.$$

   (b) On ne peut tirer la boule noire au $2j+1$-ième tirage que si elle n'a jamais été tirée avant à un tirage d'ordre impair. Donc

$$P(X_{2j+1} = 1) = P\left(\bigcap_{i=1}^{j-1} X_{2i+1} = 0 \cap X_{2j+1} = 1\right)$$

$$= P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_3 = 0)\cdots P_{\bigcap_{i=1}^{j-2} X_{2i+1}=0}(X_{2j-1} = 0)P_{\bigcap_{i=1}^{j-1} X_{2i+1}=0}(X_{2j+1} = 1).$$

   Or chacun des $P_{\bigcap_{i=1}^{k} X_{2i+1}=0}(X_{2k+1} = 0)$ vaut $\frac{n-k-1}{n-k}$ (il reste $n-k$ boules dans l'urne, dont une noire et $n-k-1$ blanches), et donc

$$P(X_{2j+1} = 1) = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-j}{n-j+1}\frac{1}{n-j}.$$

   Par téléscopage, on trouve donc

$$P(X_{2j+1} = 1) = \frac{1}{n}.$$

   Le $2j$-ième tirage s'effectuant avec remise, l'urne est dans la même disposition entre le $2j$-ième et le $2j+1$-ième tirage. Les probabilités d'avoir une boule noire sont donc égales :

$$P(X_{2j} = 1) = \frac{1}{n}.$$

   (c) Finalement, les variables X_k sont des variables de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.

3. (a) Avant le $2n-2$-ième tirage, il n'y a plus qu'une boule dans l'urne. Si c'est une boule blanche, la boule noire a été tirée précédemment, et si c'est la boule noire, elle est tirée avec probabilité 1 lors de ce $2n-2$-ième tirage.

   Dans tous les cas, la boule noire ne peut pas être tirée pour la première fois au $2n-1$-ième tirage.

   Donc $P(U_n) = 0$.

   On a $P(U_j) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0 \cap \cdots \cap X_{2j-2} = 0 \cap X_{2j-1} = 1)$. Par la formule des probabilités composées,

$$P(U_j) = P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 0)\cdots P_{\bigcap_{i=1} 2j-4 X_i=0}(X_{2j-3} = 0)P_{\bigcap_{i=1} 2j-3 X_i=0}(X_{2j-2} = 0)P_{\bigcap_{i=1} 2j-2 X_i=0}(X_{2j-1} = 1$$

   et donc

$$P(U_j) = \frac{n-1}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-j+1}{n-j+2}\frac{n-j+1}{n-j+1+2}\frac{1}{n-j+1}.$$

   Par téléscopage, on retrouve bien

$$P(U_j) = \frac{n-j}{n(n-1)}.$$

(b) $X=1$ signifie que la boule noire est sortie exactement une fois ; autrement dit, un et un seul U_j est réalisé :

$$(X=1)=\bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Les U_j étant disjoints,

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= \sum_{i=1}^{n} P(U_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n(n-1)} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (n-i) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} i \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(c) Supposons que la boule noire sorte au tirage d'ordre $2j-1$. Alors nécessairement, elle n'a été tirée à aucun tirage d'ordre impair précédent, et elle a donc été tirée au plus j fois (une fois à chaque tirage d'ordre pair, plus une fois au tirage $2j-1$).

Donc, pour avoir eu au n fois la boule noire, elle ne doit pas être tirée à un rang impair avant le $2n-1$-ième tirage.

L'unique moyen de tirer n boules noires est donc de tirer

- des boules noires aux tirages d'ordres pairs
- des boules blanches aux tirages d'ordre impairs strictement inférieurs à $2n-1$
- une boule noire au dernier tirage

Finalement

$$P(X=n)=P(X_1=0\cap X_2=1\cap X_3=0\cap\cdots\cap X_{2n-3}=0\cap X_{2n-2}=1\cap X_{2n-1}=1).$$

Par la formule des probabilités composées,

$$P(X=n)=P(X_1=0)P_{X_1=0}(X_2=1)P_{X_1=0\cap X_2=1}(X_3=0)\cdots P_{X_1=0\cap X_2=1\cap\cdots\cap X_{2n-4}=1}(X_{2n-3}=0)$$
$$P_{X_1=0\cap X_2=1\cap\cdots\cap X_{2n-3}=0}(X_{2n-2}=1)P_{X_1=0\cap X_2=1\cap\cdots\cap X_{2n-2}=1}(X_{2n-1}=1).$$

Donc, en simplifiant

$$P(X=n)=\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\frac{n-2}{n-1}\frac{1}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{1}{2}1=\frac{1}{n!}.$$

4. X compte le nombre d'apparitions de la boule noire, et X_k vaut 1 si la boule noire est tirée au k-ième tirage ; on a donc bien

$$X=\sum_{k=1}^{2n-1} X_k.$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc $E(X)=\sum_{k=1}^{2n-1} E(X_k)$, et pour tout k, $E(X_k)=\frac{1}{n}$.

Finalement, $E(X)=\frac{2n-1}{n}$.

5. (a) Si la boule noire a été tirée au $2i+1$-ième tirage, elle ne peut plus être tirée plus tard, donc

$$P_{X_{2i+1}=1}(X_{2i+j+1}=1)=0.$$

(b) Par la formule de Huygens, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) &= E(X_{2i+1}X_{2i+j+1}) - E(X_{2i+1})E(X_{2i+j+1}) \\
&= P(X_{2i+1} = 1 \cap X_{2i+j+1} = 1) - \frac{1}{n^2} \\
&= P_{X_{2i+1}=1}(X_{2i+j+1} = 1)P(X_{2i+1} = 1) - \frac{1}{n^2} \qquad = -\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

6. (a) Si on suppose que $X_{2i} = 1$, cela revient à faire la même expérience que celle de l'exercice avec seulement $n - i$ boules. On a donc, comme dans la question 2b, $P_{X_{2i}=1}(X_{2i+2k} = 1) = \frac{1}{n-i}$.

   (b) Toujours comme dans la question 2b, $P_{X_{2i}=1}(X_{2i+2k+1} = 1) = \frac{1}{n-i}$.

   (c) Par la formule de Huygens

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_{2i}, X_{2i+j}) &= E(X_{2i}X_{2i+j}) - E(X_{2i})E(X_{2i+j}) \\
&= P(X_{2i} = 1 \cap X_{2i+j} = 1) - \frac{1}{n^2} \\
&= P_{X_{2i}=1}(X_{2i+j} = 1)P(X_{2i} = 1) - \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n-i}\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{i}{n^2(n-i)}
\end{aligned}$$

7. On a

$$\begin{aligned}
V(X) &= V\left(\sum_{i=1}^{2n-1} X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2n-1} V(X_i) + 2\sum_{j=1}^{2n-1}\sum_{i=1}^{j-1} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)
\end{aligned}$$

Or $V(X_i) = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n^2}$. De plus, si $i < j$,

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} \frac{-1}{n^2} & \text{si } i \text{ impair} \\ \frac{i}{n^2(n-1)} & \text{si } i \text{ pair} \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2n-1}\sum_{i=1}^{j-1} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{Cov}(X_1, X_3) + \mathrm{Cov}(X_2, X_3) + \mathrm{Cov}(X_1, X_4) + \mathrm{Cov}(X_2, X_4) + \mathrm{Cov}(X_3, X_4) \\
&\quad + \cdots + \mathrm{Cov}(X_1, X_{2n-1}) + \cdots + \mathrm{Cov}(X_{2n-2}, X_{2n-1}) \\
&= \sum_{j=2}^{2n-2} \mathrm{Cov}(X_1, X_j) + \sum_{j=3}^{2n-1} \mathrm{Cov}(X_2, X_j) + \cdots + \sum_{j=2n-1}^{2n-1} \mathrm{Cov}(X_{2n-2}, X_j) \\
&= \cdots \\
&= \frac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. On a bien

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I_2,$$

$V \neq I_2$,
$$(V - I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$
De plus, soit $X = \binom{x}{y} \in \ker(U + V - I_2)$:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$
Alors $x = 0, y = 1$ convient, et donc $\binom{0}{1} \in \ker(U + V - I_2)$. Finalement, u et v représentés par U et V dans la base canonique conviennent.

2. (a) On a $u \circ (-u) = \mathrm{id}$, et donc u est bijectif d'inverse $-u$.
   v et id commutent, et donc la condition (A_3) donne $v^2 - 2v = -\mathrm{id}$, *i.e.* $v \circ (v - 2\mathrm{id}) = -\mathrm{id}$. v est donc inversible, d'inverse $2\mathrm{id} - v$.
   (b) On a déjà vu $v^2 = 2v - \mathrm{id}$. Donc $v^3 = 2v^2 - v = 2(2v - id) - v = 3v - 2\mathrm{id}$. De même, $v^4 = 3v^2 - 2v = 3(2v - \mathrm{id}) - 2v = 4v - 3\mathrm{id}$.
   Montrons par récurrence sur n que $v^n = nv - (n-1)\mathrm{id}$ pour tout $n \geqslant 2$.
   - Pour $n = 2$, on le sait déjà.
   - Supposons que pour un certain $n \geqslant 2$, $v^n = nv - (n-1)\mathrm{id}$. Alors $v^{n+1} = nv^2 - (n-1)v = n(2v - \mathrm{id}) - (n-1)v = (n+1)v - n\mathrm{id}$.

   Par théorème de récurrence, on a donc bien
$$\forall n \geqslant 2,\ v^n = nv - (n-1)\mathrm{id}.$$
   On vérifie que la formule fonctionne bien pour $n = 0$ et $n = 1$.

3. (a) Soit $x \in \mathrm{Im}(v - id)$. Il existe $z \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = (v - \mathrm{id})(z)$. Mais alors
$$(v - \mathrm{id})(x) = (v - \mathrm{id})^2(z) = 0$$
   par la propriété (A_3). Donc $x \in \ker(v - \mathrm{id})$.
   (b) Par le théorème du rang,
$$\dim(\mathrm{Im}(v - \mathrm{id})) + \dim(\ker(v - \mathrm{id})) = 2.$$
   Comme $\dim(\mathrm{Im}(v - \mathrm{id})) \leqslant \dim(\ker(v - \mathrm{id}))$ d'après la question précédente, les seuls choix possibles sont
$$\dim(\mathrm{Im}(v - \mathrm{id})) = 0 \text{ et } \dim(\ker(v - \mathrm{id})) = 2 \text{ ou } \dim(\mathrm{Im}(v - \mathrm{id})) = 1 \text{ et } \dim(\ker(v - \mathrm{id})) = 1.$$
   Comme $v - \mathrm{id} \neq 0$ (A_2), $v - \mathrm{id}$ ne peut pas être de rang 0 et donc
$$\dim(\mathrm{Im}(v - \mathrm{id})) = 1 \text{ et } \dim(\ker(v - \mathrm{id})) = 1.$$
   Donc on a bien l'égalité.

4. On sait déjà que $\ker(u + v - \mathrm{id})\ \not\{0\}$, et donc ne peut être que de dimension 1 ou 2. Supposons qu'il est de dimension 2. Alors $u + v - \mathrm{id} = 0$, et donc $u = -(v - \mathrm{id})$.
   Donc, par (A_1), $-\mathrm{id} = (v - \mathrm{id})^2$, ce qui est impossible car d'après la question précédente, $v - \mathrm{id}$ n'est pas inversible.

5. (a) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que
$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0,$$
   i.e.
$$\lambda_2 e_2 = \lambda_1 u(e_2).$$
   Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $u(e_2) = \lambda e_2$ avec $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, et donc λ est valeur propre de u.
   Mais $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de u d'après (A_1), et donc u ne peut pas avoir de valeurs propres réelles.
   Finalement, $\lambda_1 = 0$, puis $\lambda_2 = 0$. (e_1, e_2) forme bien une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) On a $u(e_1) = -u(u(e_2)) = e_2$ et $u(e_2) = -e_1$. Donc

$$\mathrm{mat}_{(e_1,e_2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus, $v(e_2) = e_2 - u(e_2)$ car $e_2 \in \ker(u + v - \mathrm{id})$, et donc $v(e_2) = e_1 + e_2$. Notons $v(e_1) = ae_1 + be_2$. Alors

$$\mathrm{mat}_{(e_1,e_2)}(v) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

L'hypothèse (A_3) nous donne

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-1)^2 + b & a-1 \\ (a-1)b + b & b \end{pmatrix} = 0$$

On trouve donc $a = 1$ et $b = 0$. Finalement,

$$\mathrm{mat}_{(e_1,e_2)}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Finalement, u et v sont solutions du problèmes si et seulement si leurs matrices sont de la forme données dans l'énoncé (la question se généralise à n'importe quelle base de $\mathbb{R}^2$).

Problème

Partie 1

1. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0.$$

Alors, comme $e^{-x} \neq 0$, on a pour tout x

$$\lambda_0 x^0 + \cdots + \lambda_n x^n = 0.$$

Comme les x^i forment une famille libre, on retrouve $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Donc $(f_0, \dots, f_n)$ est libre. Comme elle est aussi génératrice par définition, c'est bien un base de E_n.

2. (a) On a $d(f_0) = -f_0$, et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ d(f_k)(x) = kx^{k-1}e^{-x} + x^k(-e^-x).$$

Finalement, $d(f_k) = kf_{k-1} - f_k$.

(b) La question précédente montre que l'image de d est bien incluse dans E_n.

La dérivation étant clairement linéaire, d est bien un endomorphisme de E_n.

3. (a) Soit $f \in \ker(d)$. Alors $d(f) = 0$, et donc f est une fonction constante. Mais toutes les fonctions de E_n sont de la forme $P(x)e^{-x}$, où P est un polynôme. Par croissances comparées, toutes les fonctions de E_n ont une limite nulle en $+\infty$, et donc $f = 0$.

Donc d est injective, en dimension finie, et donc d est un automorphisme.

(b) On a déjà vu que $d(f_k) = kf_{k-1} - f_k$. Donc par linéarité,

$$d(\frac{1}{k!}) = \frac{1}{k!}kf_{k-1} - \frac{1}{k!}f_k = \frac{1}{(k-1)!}f_{k-1} - \frac{1}{k!}f_k.$$

(c) Posons $g_k = \frac{1}{k!} f_k$. La relation précédente devient $d(g_k) = g_{k-1} - g_k$. Sommons cette relation de $i = 1$ à k :

$$d\left(\sum_{i=1}^{k} g_k\right) = g_0 - g_k$$

par téléscopage. On a donc

$$\sum_{i=1}^{k} g_k = d^{-1}(g_0) - d^{-1}(g_k).$$

On connaît déjà $d^{-1}(g_0) = -g_0$, et on trouve donc

$$d^{-1}(g_k) = -\sum_{i=0}^{k} g_k.$$

En revanant aux f_k, on a donc

$$d^{-1}(f_k) = -k! \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} f_i.$$

4. NOTA

On note qu'on devrait reconnaître $\Gamma(j+1) = j!$. Vu l'énoncé, faisons comme si on avait rien vu.

Soit $A > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^A x^j e^{-x} \mathrm{d}x &= \int_0^A f_j(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^A d^{-1}(f_j)'(x) \mathrm{d}x \\
&= \left[d^{-1}(f_j)(x)\right]_0^A \\
&= d^{-1}(f_j)(A) - d^{-1}(f_j)(0) \\
&= -j! \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{i!} f_i(A) + j! \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{i!} f_i(0) \\
&= -j! \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{i!} f_i(A) + j!
\end{aligned}$$

Or pour tout i, $f_i(A) \to 0$ quand $A \to \infty$.

Finalement I_j converge et vaut $j!$.

5. Cette application est clairement bilinéaire et symétrique, car le produit sur $\mathbb{R}$ l'est. Soit $f \in E_n$. Alors

$$(f \mid f) = \int_{0^\infty} f(x)^2 e^x \mathrm{d}x \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale.

De plus, on a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si $\forall x \geqslant 0,\ f(x)^2 e^x = 0$ (cas de nullité de l'intégrale d'une fonction positive). Donc $f = 0$.

Finalement, on a bien définit un produit scalaire.

Partie 2

1. (a) E_{n-1} est un sous-espace vectoriel de E_n, et donc l'ensemble $\{\|f_n - g\| \mid g \in E_{n-1}\}$ admet un minimum en $h = p_{E_{n-1}}(f_n)$, qui vaut la distance entre f_n et E_{n-1}.
   (b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors $f_k \in E_{n-1}$ et $f_n - h \in E_{n-1}^{\perp}$, car h est le projeté orthogonal de f_n sur E_{n-1}. Donc $f_n - h \perp f_k$.
   (c) On a alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$\int_0^{\infty} (f_n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j f_j)(x) f_k(x) e^x \mathrm{d}x = 0$$

   et donc, par linéarité de l'intégrale et 1.4,

$$(k+n)! - \sum_{j=0}^{n-1} a_j (k+j)! = 0.$$

2. (a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a

$$\begin{aligned} P(k) &= a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{(k+j)!}{k!} + \frac{(k+n)!}{k!} \\ &= a_0 + \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j (k+j)! + (k+n)! \right) \\ &= a_0 + \frac{1}{k!} \times (-a_0 k!) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   (b) On a donc, comme P est un polynôme unitaire

$$P(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (X - i).$$

   Donc $P(n) = \prod_{i=0}^{n-1} (n-i) = n!$.

3. (a) On a $(f_n - h \mid f_n - h) = (f_n - h \mid f_n) + (f_n - h \mid h)$. Or $f_n - h \in E_{n-1}^{\perp}$ et $h \in E_{n-1}$, donc $(f_n - h \mid h) = 0$.
   (b) On reconnaît que

$$m = \inf_{f \in E_{n-1}} \|f_n - f\|^2.$$

   Donc d'après le théorème de la distance entre un point et un sous-espace vectoriel, ce minimum existe et est atteint en $f = h$.
   Donc $m = \|f_n - h\|^2 = (f_n - h \mid f_n)$.
   Or

$$\begin{aligned} (f_n - h \mid f_n) &= \|f_n\|^2 - (h \mid f_n) \\ &= (2n)! + \sum_{j=0}^{n-1} (a_j f_j \mid f_n) \\ &= (2n)! + \sum_{j=0}^{n-1} a_j (n+j)! \\ &= n! P(n) \\ &= (n!)^2 \end{aligned}$$

   Donc $m = (n!)^2$.