ECS2 : Corrigé EML 2006

Problème 1

Préliminaires

1. (a) Par croissances comparées, il est clair que quand $t \to \infty$, $t^{n+1}e^{-t^2} \to 0$, et donc

$$t^n e^{-t^2} \underset{t\to\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

(b) Quelque soit la parité de n, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est paire ou impaire ; dans les deux cas, il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale entre 0 et ∞.

La fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et d'après la question précédente et comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, son intégrale converge en ∞. Finalement, l'intégrale est bien convergente entre 0 et ∞, et donc entre $-\infty$ et ∞ par (im)parité.

2. Par linéarité de l'intégrale, comme chacune des $\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-t^2} \mathrm{d}t$ est convergente, toute intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} P(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $A > 0$. Les fonctions $t \mapsto t^{n+1}$ et $t \mapsto -e^{-t^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, et donc par théorème d'intégration par parties

$$\int_{-A}^{A} t^{n+2}e^{-t^2}\mathrm{d}t = \left[-t^{n+1}\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_{-A}^{A} + \int_{-A}^{A}(n+1)t^n\frac{1}{2}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Le crochet tend vers 0 quand $A \to \infty$ par croissante comparée, et l'intégrale converge vers $\frac{n+1}{2}I_n$. On a donc bien le résultat demandé

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n.$$

(b) La fonction $t \mapsto t^{2p+1}e^{-t^2}$ est impaire, et son intégrale entre $-\infty$ et ∞ converge. Cette intégrale est donc nulle.

(c) Montrons la propriété par récurrence sur p.
On sait que $I_0 = \sqrt{\pi}$.
Supposons que l'égalité est vérifiée pour un $p \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2}I_{2p} \text{ par la question I.3.a} \\
&= \frac{2p+1}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi} \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+1}p!(2p+2)}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée pour $p+1$, et donc par théorème de récurrence, on a bien
$$\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}.$$

I. Recherche d'extrémums locaux pour une fonction de deux variables réelles

1. On a pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$,
$(t-x)^2(t-y)^2 = (t^2-2xt+x^2)(t^2-2yt+y^2) = t^4 - t^3(2x+2y) + t^2(x^2+y^2+4xy) - t(2xy^2+2x^2y) + x^2y^2.$
Par linéarité de l'intégrale, comme toutes les intégrales sont convergentes par I.1.b, on a donc
$$\begin{aligned}F(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Bigg(\int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-t^2}\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{\infty} t^3(2x+2y)e^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} t^2(x^2+y^2+4xy)e^{-t^2}\mathrm{d}t \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} t(2xy^2+2x^2y)e^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} x^2y^2e^{-t^2}\mathrm{d}t\Bigg) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} t^4e^{-t^2}\mathrm{d}t + (x^2+y^2+4xy)\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t + x^2y^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right) \text{ par I.3.b et linéarité} \\ &= \frac{4!}{2^4 2!} + (x^2+y^2+4xy)\frac{2!}{2^2 1!} + x^2y^2 \text{ par I.3.c} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2+4xy+y^2) + x^2y^2\end{aligned}$$

2. La fonction F est donc polynomiale, et donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\partial_1 F(x,y) = x + 2y + 2xy^2$$
$$\partial_2 F(x,y) = y + 2x + 2x^2y$$
Soit (x,y) un point critique de F. Alors $x+2y+2xy^2 = 0$ et $y+2x+2x^2y = 0$.
En soustrayant les deux équations, on obtient $(x-y)(1+2xy) = 0$, et donc $x = y$ ou $1+2xy = 0$.
Dans le premier cas, on a alors avec la première équation $3x+2x^3 = 0$, et donc $x = 0$ ou $2x^2+3 = 0$, qui est impossible. On trouve donc $(x,y) = (0,0)$, et réciproquement, c'est bien un point critique.
Dans le second cas, on a alors $2xy = -1$, et dans la première équation, on retrouve $x+y = 0$, *i.e.* $x = -y$. Donc $x^2 = \frac{1}{2}$, et donc $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. On trouve donc $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ou $(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, et réciproquement, ce sont bien des points critiques.
Finalement, les points critiques de F sont
$$O = (0,0)\ a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ b = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

3. Étudions chacun des points critiques. La fonction F étant de classe $\mathcal{C}^2$ (car polynomiale), on va étudier les matrices hessiennes. On a
$$\partial^2_{11} F(x,y) = 1 + 2y^2$$
$$\partial^2_{22} F(x,y) = 1 + 2x^2$$
$$\partial^2_{12} F(x,y) = 2 + 4xy$$

Point O : La matrice hessienne en O est alors
$$\nabla^2 F(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ses valeurs propres sont racines du trinôme $X^2 - 2X - 3 = 0$, *i.e.* $\mathrm{Spec}(\nabla^2 F(O)) = \{-1, 3\}$.
$\nabla^2 F(O)$ admet donc deux valeurs propres de signe strictement distinct, et donc F admet un point selle en O.

Point a : La matrice hessienne de a est alors
$$\nabla^2 F(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
On a alors $\mathrm{Spec}(\nabla^2 F(a)) = \{2\}$, et donc F admet un minimum en a.

Point b : La matrice hessienne de b est alors
$$\nabla^2 F(b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
On a alors $\mathrm{Spec}(\nabla^2 F(b)) = \{2\}$, et donc F admet un minimum en b.

II. Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^+$. On a alors
$$\left|\sin(xt)e^{-t^2}\right| \leqslant e^{-t^2},$$
et donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale
$$\int_0^\infty \sin(xt)e^{-t^2}\mathrm{d}t$$
converge absolument, donc converge.
De même,
$$\left|t\cos(xt)e^{-t^2}\right| \leqslant te^{-t^2},$$
et par comparaison, l'intégrale
$$\int_0^\infty t\cos(xt)e^{-t^2}\mathrm{d}t$$
converge absolument, donc converge.

2. Soient $a, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors on peut écrire
$$\sin(a+\lambda) = \sin a + \sin'(a)\lambda + R,$$
où le reste R vérifie
$$|R| \leqslant \frac{1}{2}\lambda^2 \max_{x\in\mathbb{R}} |\sin''(x)| = \frac{1}{2}\lambda^2$$
par l'inégalité de Taylor-Lagrange. Comme $\sin'(a) = -\cos(a)$, on retrouve bien le résultat.

3. (a) Soient $x, h \in \mathbb{R}$.
Par linéarité de l'intégrale, on a alors
$$\frac{1}{h}(S(x+h) - S(x)) - C(x) = \frac{1}{h}\int_0^\infty (\sin(xt+ht) - \sin(xt) - ht\cos(xt))e^{-t^2}\mathrm{d}t,$$
et donc par l'inégalité triangulaire (les intégrales convergent absolument),
$$\left|\frac{1}{h}(S(x+h) - S(x)) - C(x)\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^\infty |\sin(xt+ht) - \sin(xt) - ht\cos(xt)|\, e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$
D'après la question précédente, on a
$$|\sin(xt+ht) - \sin(xt) - ht\cos(xt)| \leqslant \frac{1}{2}h^2t^2,$$
et donc
$$\left|\frac{1}{h}(S(x+h) - S(x)) - C(x)\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^\infty \frac{1}{2}h^2t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{h^2}{|h|}I_2.$$
Donc, quand $h \to 0$, on a bien $\left|\frac{1}{h}(S(x+h) - S(x)) - C(x)\right| \to 0$.

(b) On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = C(x),$$

et donc par définition, S est dérivable en x et $S'(x) = C(x)$.

4. (a) Soit $A > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto \cos(xt)$ et $t \mapsto -e^{-t^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, et par théorème d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^A t\cos(xt)e^{-t^2}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{2}\cos(xt)e^{-t^2}\right]_0^A + \frac{x}{2}\int_0^A \sin(xt)e^{-t^2}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\cos(xA)e^{-A^2} + \frac{1}{2} + \frac{x}{2}\int_0^A \sin(xt)e^{-t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 quand $A \to \infty$ car cos est bornée, et l'intégrale tend vers $S(x)$. On a donc bien

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x).$$

(b) La fonction $\alpha : x \mapsto 2e^{x^2/4}S(x)$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et la fonction $\beta : x \mapsto \int_0^x e^{t^2/4}\mathrm{d}t$ est dérivable par théorème fondamental de l'analyse.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha'(x) = xe^{x^2/4}S(x) + 2e^{x^2/4}C(x) = e^{x^2/4}\left(xS(x) + 2C(x)\right) = e^{x^2/4}$$

d'après la question précédente.
On a aussi $\beta'(x) = e^{x^2/4}$. Comme $S(0) = 0$, on a $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, et donc α et β ont même dérivée et coïncident en un point : elles sont égales.

(c) Une simple division par $2e^{x^2/4} \neq 0$ permet de trouver la première formule, et la question II.4.a permet de trouver la seconde.

III. Obtention d'un développement limité

1. On note que pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, $1\frac{1}{1+x^2t^2} \leqslant 1$, et donc par comparaison avec e^{-t^2}, l'intégrale voulue converge.

2. (a) Quitte à multiplier par $1+u$ qui est strictement positif, on veut montrer que

$$0 \leqslant (1+u)(1-u+u^2) - 1 \leqslant u4 + u^3.$$

Or $(1+u)(1-u+u^2) - 1 = 1 - u + u^2 + u - u^2 + u^3 - 1 = u^3 \leqslant u^3 + u^4$ car $u \geqslant 0$.
On a donc bien l'inégalité voulue.

(b) Par linéarité, comme toutes les intégrales convergent, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1 - x^2t^2 + x^4t^4)e^{-t^2}\mathrm{d}t - g(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - (xt)^2 + ((xt)^2)^2 - \frac{1}{1+(xt)^2}\right)e^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

puis par l'inégalité précédente,

$$0 \leqslant 1 - (xt)^2 + ((xt)^2)^2 - \frac{1}{1+(xt)^2} \leqslant (xt)^6.$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}(1 - x^2t^2 + x^4t^4)e^{-t^2}\mathrm{d}t - g(x) \leqslant x^6 I_6 = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}x^6$$

d'après la question I.3.c.

3. Par linéarité, on peut développer l'intégrale de la question précédente :

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\mathrm{d}t = I_0 - x^2 I_2 + x^4 I_4 = \sqrt{\pi}(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^4).$$

On peut alors écrire l'égalité :

$$g(x) = \sqrt{\pi}(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^4) + g(x) - \sqrt{\pi}(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^4).$$

D'après la question précédente, on a par encadrement

$$g(x) - \sqrt{\pi}(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^4) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5),$$

et donc au voisinage de 0,

$$g(x) = \sqrt{\pi}(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^4) + \mathrm{o}(x^5).$$

IV. Nature d'une série

1. La fonction considérée est continue sur $\mathbb{R}$, et paire. Par croissance comparée, c'est un $\underset{t\to\infty}{\mathrm{o}}(t^{-2})$, et donc intégrable au voisinage de ∞.
Par parité, l'intégrale converge bien.
2. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 + (2p)! \geqslant (2p)!$, et donc

$$\frac{1}{t^2+(2p)!} \leqslant \frac{1}{(2p)!}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a bien $u_p \leqslant \frac{I_{2p}}{(2p)!}$.
De plus, par positivité de l'intégrale, $u_p \geqslant 0$.
On en déduit donc par I.3.c que pour tout p

$$0 \leqslant u_p \leqslant \sqrt{\pi}\frac{1}{2^{2p}p!},$$

et donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_p$ converge.

Problème 2

1. (a) D'après la matrice, on a

$$\forall i \in [\![1; n-1]\!],\ f(e_i) = e_{i+1}.$$

(b) Une récurrence immédiate donne le premier résultat : $f^j(e_1) = e_{j+1}$. De plus,

$$f^n(e^1) = f(f^{n-1}(e_1)) = f(e_n) = -(a_0e_1 + \cdots + a_{n-1}e_n).$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned} g(e_1) &= f^n(e_1) + a_{n-1}f^{n-1}(e_1) + \cdots + a_0e_1 \\ &= -(a_0e_1 + \cdots + a_{n-1}e_n) + a_{n-1}e_n + \cdots + a_0e_1 \text{ par la question précédente} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) g et f^i sont tous les deux des polynômes de f, et donc commutent.

(c) En appliquant l'égalité précédente à e_1, on a donc

$$g(f^{i-1}(e_1)) = f^{i-1}(g(e_1)) = 0$$

par la question 2.a, puis $g(f^{i-1}(e_1)) = g(e_i)$ par 1.b.

(d) La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ étant une base, et g s'annulant sur cette famille, g est donc l'endomorphisme nul.

Donc

$$f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{id} = P(f) = 0.$$

P est donc un polynôme annulateur de f.

Le polynôme $P = X^5 - A^3 - 2A^2 - I_5$ doit être un polynôme annulateur de A. La matrice compagnon de P

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

convient donc bien.

(e) On sait que toutes les valeurs propres d'une matrice sont racines de ses polynômes annulateurs. Comme P est annulateur, toutes les valeurs propres de C sont racines de P.

3. (a) D'après la question 1.b, on a $f^i(e_1) = e_{i+1}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, et donc

$$Q(f)(e_1) = \alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + \cdots + \alpha_{n-1} e_n.$$

(b) Si Q était un polynôme annulateur, on aurait alors $Q(f)(e_1) = 0$. Par liberté de la base $\mathcal{B}_0$, on aurait alors $\alpha_i = 0$ pour tout i, et donc $Q = 0$; ce qui est impossible, un polynôme annulateur devant être non nul par définition.

(c) On a $P(f) = ((X - \lambda)R)(f) = (f - \lambda \mathrm{id}) \circ R(f) = 0$.

(d) R étant de degré $\leqslant n-1$, il n'est pas annulateur de f : il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $R(f)(x) \neq 0$ (et donc $x \neq 0$). Mais on a alors par la question précédente

$$(f - \lambda \mathrm{id})(x) = 0,$$

c'est-à-dire $f(x) = \lambda x$. Comme $x \neq 0$, λ est donc une valeur propre de f.

Toutes les racines de P sont donc des valeurs propres de f, donc de C.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{C}$. Les $n-1$ première colonnes de $C - xI_n$ forment clairement une famille libre, et donc le rang est supérieur ou égal à $n-1$. Si λ est une valeur propre de C, alors le rang de $C - \lambda I_n$ est inférieur à $n-1$, et donc égal à $n-1$. Par théorème du rang, le sous-espace propre est donc de dimension 1.

(b) C est diagonalisable si et seulement la somme des dimensions de ses sous-espaces est égale à n. Comme chaque sous-espace est de dimension 1, il faut nécessairement n valeurs propres distinctes, et donc (question 3.d) n racines distinctes de P pour que C soit diagonalisable.

5. (a) A_1 est la matrice compagnon du polynôme $P_1 = X^4 - 1$, qui admet quatre racines complexes $1, -1, i, -i$. D'après 4.b, A_1 est diagonalisable.

(b) A_2 est la matrice compagnon du polynôme $P_2 = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4$. 1 est une racine évidente de P_2, et $P_2' = 4X^3 - 6X^2 - 6X + 8$ admet aussi 1 pour racine.

1 est donc racine double de P, et donc P_2 ne peut pas admettre 4 racines distinctes. Donc par 4.b, A_2 n'est pas diagonalisable.

6. (a) On a pour tout $t \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(B - tI_n) \text{ inversible } &\Leftrightarrow ({}^{\mathbf{t}}C - tI_n) \text{ inversible}\\ &\Leftrightarrow \text{rg}({}^{\mathbf{t}}C - tI_n) = n\\ &\Leftrightarrow \text{rg}({}^{\mathbf{t}}(C - tI_n)) = n \text{ par linéarité de la transposée et } {}^{\mathbf{t}}I_n = I_n\\ &\Leftrightarrow \text{rg}(C - tI_n) = n \text{ par invariance du rang par transposée}\\ &\Leftrightarrow C - tI_n \text{ inversible}\end{aligned}$$

(b) On sait que λ est une valeur propre de B si et seulement si $B - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Par la question précédente, c'est équivalent à dire que $C - \lambda I_n$ n'est pas inversible, *i.e.* que λ est valeur propre de C.
B et C ont donc les mêmes valeurs propres.

(c) Soit $C = {}^{\mathbf{t}}(x_1 \cdots x_n)$ un vecteur propre de B. Alors $BX = \lambda X$, et donc en calculant le produit

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -(a_0 x_1 + a_1 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_n) = \lambda x_n \end{cases}$$

Une récurrence immédiate nous donne donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \lambda^{i-1} x_1.$$

x_1 est donc nécessairement non nul, car sinon on aurait $x = 0$, e qui est exclu.
Le sous-espace étant de dimension au moins 1, on a donc

$$E_\lambda(B) = \text{Vect}({}^{\mathbf{t}}(1\ \lambda\ \cdots \lambda^{n-1})).$$

(d) On sait par 3.d que C admet $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comme valeurs propres, et il en est de même pour B (question 6.b).
B a donc n valeurs propres distinctes, et est donc diagonalisable. De plus, la famille

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

formée de vecteurs propres respectivement associés à $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ est une base de $\mathbb{C}^n$, et la matrice indiquée est donc inversible.

7. (a) Notons que pour tout i, on a

$$\begin{aligned} u^i(a) &= u^i(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)\\ &= u^i(\varepsilon_1) + \cdots + u^i(\varepsilon_n)\\ &= \mu_1^i \varepsilon_1 + \cdots + \mu_n^i \varepsilon_n\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu_k^i \varepsilon_k\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}_a$ est donc libre si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \cdots & \mu_1^{n-1} \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mu_n & \mu_n^2 & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

est inversible, ce qui équivaut à l'inversibilité de sa transposée.
Or, les μ_i étant distincts, la question 6.d prouve l'inversibilité de cette matrice.
La famille $\mathcal{B}_a$ est donc une base de E.

(b) Notons $f_k = u^{k-1}(a)$. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est donc une base de E. On a pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$u(f_k) = u(u^{k-1}(a)) = f_{k+1},$$

et comme $(f_1, \dots, f_n)$ est génératrice, il existe des complexes $c_1, \dots, c_n$ tels que

$$u(f_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i.$$

En posant $b_i = -c_{i-1}$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_a$ est donc la matrice compagnon de P.