La suite audioactive de Conway

Table des matières

1 Introduction

1.1 Définitions

La suite audioactive de Conway a été découverte par le mathématicien américain John Horton Conway en 1987.
On définit l'opérateur JHC par :

$$JHC(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_m^{n_m}) = n_1 a_1 n_2 a_2 \cdots n_m a_m$$

où a^n représente $\underbrace{aa\ldots a}_{n\,fois}$, et où $\forall i,\ a_i \neq a_{i+1}$ (ie la "factorisation" est maximale).
On définit ensuite la suite de Conway par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} & = & JHC(C_n) \end{array} \right.$$

On notera L_n le nombre de chiffres de C_n

1.2 Exemples

On a par exemple :

$$JHC(1) = 11$$

$$JHC(2) = 12$$

$$JHC(3321) = 231211$$

$$JHC(128762383777) = 111218171612131811337$$

Les premiers termes de la suite de Conway sont :

$$\begin{array}{rcl} C_0 & = & 1 \\ C_1 & = & 1 \\ C_2 & = & 11 \\ C_3 & = & 21 \\ C_4 & = & 1211 \\ C_5 & = & 111221 \\ C_6 & = & 312211 \end{array}$$

1.3 Propriétés élémentaires

On peut facilement démontrer les résultats suivant :
Prop :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_n \text{ est pair}$$

Prop : La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
Prop :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_{2n+1} \text{ finit par 21 et } C_{2n+2} \text{ finit par 11}$$

Prop : Les seuls chiffres apparaissant dans la suite sont 1,2 et 3.

2 Théorème cosmologique de Conway

2.1 Définitions

Dans la suite, on considérera que $C_0 = A$, où A est une chaîne quelconque.
Soit $S = LR$, où L et R ne sont pas vides. Si $\forall n \in \mathbb{N}, JHC^n(S) = JHC^n(L)JHC^n(S)$, on dit que S se *sépare* en L et R.

Un *atome* (ou *élément*) est un élément qui ne se sépare pas, stable (c'est-à-dire qu'il ne se désintègre qu'en atomes). Il y a 92 atomes, qui ont donc les noms des atomes de la classification périodique. (cf annexe)

Un *élément transuranique* est

2.2 Théorème cosmologique de Conway

<u>Th :</u>

$\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall S \neq \emptyset$, $JHC^n(S)$ se sépare en atomes et éléments transuraniques.

Ce théorème se démontre informatiquement, et on trouve en pratique $N = 24$.

Mais nous nous interesserons plutôt au corollaire :

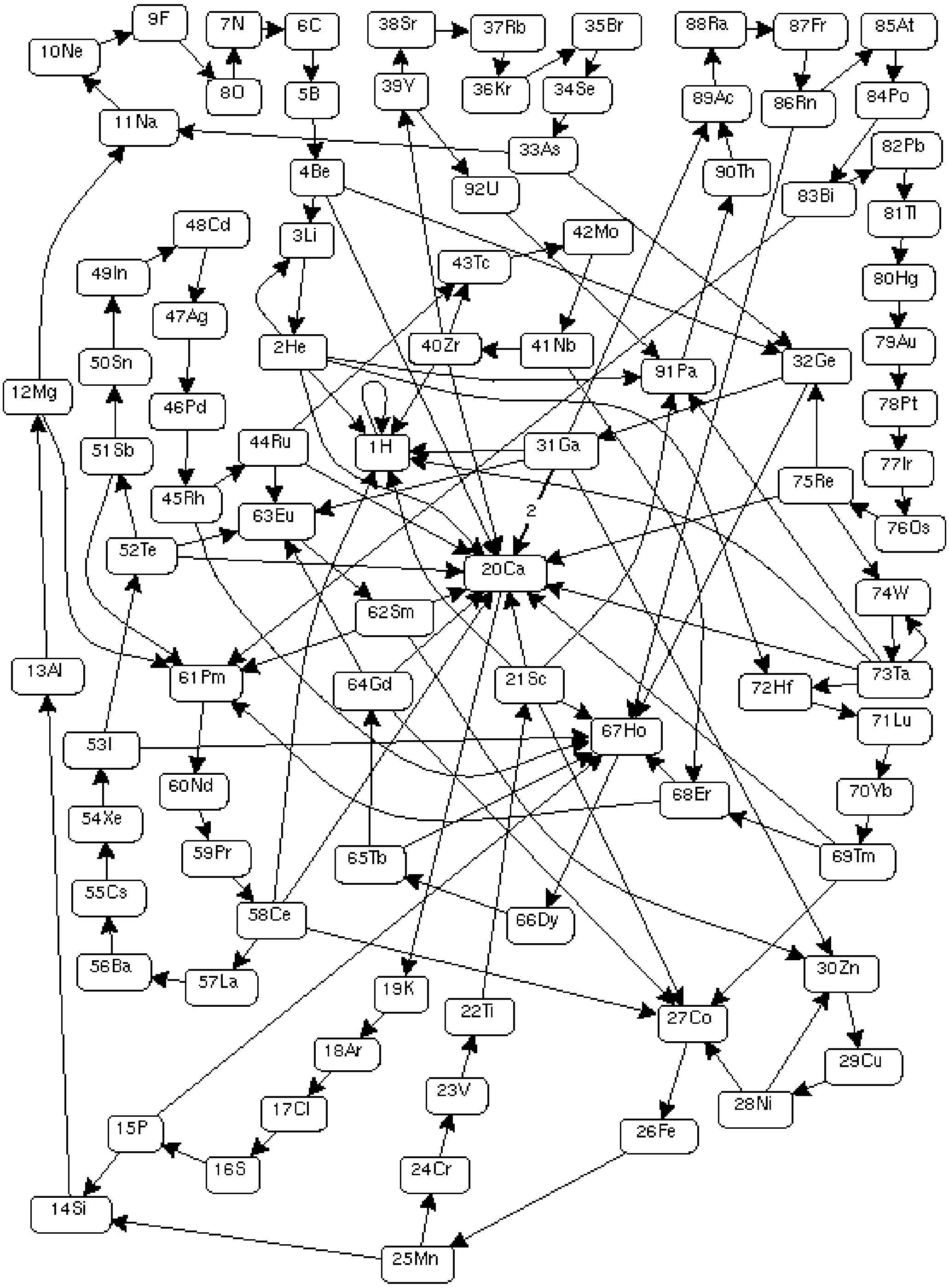
$$\frac{L_{n+1}}{L_n} \mapsto \lambda$$

où λ est la *constante de Conway*, $\lambda \approx 1,303577269 \cdots$.

2.3 Approximation de λ

À l'aide du programme fourni en annexe 2, j'ai pu approcher expérimentalement la valeur de λ. On obtient les valeurs suivantes, avec $C_0 = 1$, et en posant $\lambda_n = \frac{L_{n+1}}{L_n}$:

n	λ_n
0	1
1	2
3	2
10	$1,3$
20	$1,35099337748\ldots$
30	$1,30165844913\ldots$
40	$1,30428585004\ldots$
44	$1,30360354433\ldots$


9F
10Ne
7N
6C
8O
5B
11Na
38Sr
37Rb
35Br
39Y
36Kr
34Se
33As
88Ra
87Fr
85At
89Ac
86Rn
84Po
82Pb
4Be
92U
90Th
83Bi
81Tl
48Cd
3Li
42Mo
49In
43Tc
80Hg
47Ag
2He
40Zr
41Nb
79Au
50Sn
91Pa
32Ge
12Mg
46Pd
78Pt
44Ru
1H
31Ga
51Sb
77Ir
45Rh
63Eu
75Re
2
76Os
52Te
20Ca
74W
62Sm
13Al
61Pm
64Gd
21Sc
73Ta
72Hf
71Lu
53I
67Ho
60Nd
68Er
70Yb
54Xe
59Pr
65Tb
69Tm
55Cs
58Ce
66Dy
56Ba
57La
19K
30Zn
22Ti
27Co
18Ar
29Cu
23V
17Cl
28Ni
15P
26Fe
16S
24Cr
14Si
25Mn

Annexe 1

```
let rec jhc l =
        match l with
[] -> []
|a::[] -> 1::a::[]
|a::b::[] -> if b=a then 2::a::[] else 1::a::1::b::[]
|a::b::c::s ->
if ( a=b && b=c )
then 3::a::(jhc s)
else if ( a=b && b<>c )
then 2::a::(jhc (c::s))
else 1::a::(jhc (b::c::s))
;;

let rec conway n a =
match n with 0 -> a
     |p -> conway (p-1) ( jhc a )
;;

let lamba n a =
        match n with 0 -> failwith "lambda"
                    |p -> let k = conway n a in
                              (float_of_int (List.length ( jhc k ))) /.
                             ( float_of_int (List.length k))
;;
```

Annexe 2