Algèbres de Poisson

Kevin Quirin, avec Pol Vanhaecke

Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Poitiers

Mai-Juin 2010

Cadre

On se place sur V un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension n.

On note $\mathcal{F}(V)$ soit $\mathcal{C}^\infty(V)$, soit $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Crochet de Poisson

Définition : Crochet de Poisson

On appelle *crochet de Poisson* sur V toute application bilinéaire antisymétrique $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{F}(V) \times \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V)$ vérifiant :

Crochet de Poisson

Définition : Crochet de Poisson

On appelle *crochet de Poisson* sur V toute application bilinéaire antisymétrique $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{F}(V) \times \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V)$ vérifiant :

1. Leibniz :

$$\forall f, g, h, \ \{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{h, f\}$$

Crochet de Poisson

Définition : Crochet de Poisson

On appelle *crochet de Poisson* sur V toute application bilinéaire antisymétrique $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{F}(V) \times \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V)$ vérifiant :

1. Leibniz :
$$\forall f, g, h,\ \{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{h, f\}$$
2. Jacobi :
$$\forall f, g, h,\ \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

Exemples

Le crochet nul défini par $\{f, g\} = 0$ est un crochet de Poisson sur tout espace vectoriel.

Exemples

Le crochet nul défini par $\{f, g\} = 0$ est un crochet de Poisson sur tout espace vectoriel.

Il existe une structure de Poisson sur $\mathbb{R}^2$, définie par $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$.

Casimir

Définition : Casimir

On appellera *casimir* toute fonction f vérifiant

$$\forall g \in \mathcal{F}(V),\ \{f, g\} = 0$$

Casimir

Définition : Casimir

On appellera *casimir* toute fonction f vérifiant

$$\forall g \in \mathcal{F}(V),\ \{f, g\} = 0$$

On notera $Cas(V)$ l'algèbre des casimirs sur V (munie du produit de fonctions usuel).

Dérivation hamiltonienne

Définition : Dérivation hamiltonienne

On appellera *dérivation hamiltonienne associée à* g l'application $f \mapsto \{f, g\}$, et *dérivation hamiltonienne associée à* g *en* m l'application $f \mapsto \{f, g\}(m)$.

Dérivation hamiltonienne

Définition : Dérivation hamiltonienne

On appellera *dérivation hamiltonienne associée à g* l'application $f \mapsto \{f, g\}$, et *dérivation hamiltonienne associée à g en m* l'application $f \mapsto \{f, g\}(m)$.

On notera $\mathrm{Ham}(\{\cdot,\cdot\})$ et $\mathrm{Ham}_m(\{\cdot,\cdot\})$ les espaces correspondant.

Dérivation

Définition : Dérivation

On appelle *dérivation* sur $\mathcal{F}(V)$ toute application $\alpha : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V)$ vérifiant :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(V),\ \alpha(fg) = f\alpha(g) + g\alpha(f).$$

Dérivation

Définition : Dérivation

On appelle *dérivation* sur $\mathcal{F}(V)$ toute application $\alpha : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V)$ vérifiant :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(V),\ \alpha(fg) = f\alpha(g) + g\alpha(f).$$

Définition : k-dérivation

On appelle *k-dérivation* sur $\mathcal{F}(V)$ toute application $\alpha : \mathcal{F}(V)^k \to \mathcal{F}(V)$ qui est une dérivation en chacun de ses arguments.

On dira qu'une k-dérivation α est antisymétrique si

$$\forall f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}(V),\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k,$$
$$\alpha(\sigma(f_1, \dots, f_k)) = \varepsilon(\sigma)\alpha(f_1, \dots, f_k)$$

Caractérisation des dérivations

Théorème

Les dérivations sur $\mathcal{F}(V)$ sont exactement les applications de la forme :

$$\alpha(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad \lambda_i \in \mathcal{F}(V)$$

Caractérisation des dérivations

Théorème

Les dérivations sur $\mathcal{F}(V)$ sont exactement les applications de la forme :

$$\alpha(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad \lambda_i \in \mathcal{F}(V)$$

Ce théorème se démontre avec le *lemme d'Hadamard* :

Lemme

Soit $f \in \mathcal{F}(V)$. Soit $x \in V$. Alors

$$\forall y \in V,\ \exists h_{i,y} \in \mathcal{F}(V),\ f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i) h_{i,y}(x)$$

Corollaire : Caractérisation des k-dérivations

Il découle du théorème précédent que les k-dérivations sont exactement les applications de la forme :

$$\alpha(f_1, \ldots, f_k) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \lambda_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x_{i_k}}$$

$$\lambda_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{F}(V)$$

Corollaire : Caractérisation des crochets de Poisson

Les k-dérivations antisymétriques sont déterminées par les $\alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, où $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

En particulier, les crochets de Poisson sont déterminés par les $\{x_i, x_j\}$, $i < j$.

Dimension 1

Proposition

Si $\dim(V) = 1$, tous les crochets de Poisson sur V sont nuls.

Dimension 1

Proposition

Si $\dim(V) = 1$, tous les crochets de Poisson sur V sont nuls.

Démonstration

Soit $\{\cdot, \cdot\}$ un crochet de Poisson sur V.
Soient $f, g \in \mathcal{F}(V)$.
Alors $\{f, \cdot\}$ est une dérivation donc

$$\{f, g\} = \lambda_f g'$$

Or $\lambda_f = \{f, x\} = -\{x, f\} = -\lambda_x f'$, et $\lambda_x = \{x, x\} = 0$.
Donc

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(V),\ \{f, g\} = 0$$

Dimension 2

Théorème

Les crochets de Poisson en dimension 2 sont exactement de la forme

$$\{f,g\} = \varphi \times \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

où $\varphi \in \mathcal{F}(V)$.

Dimension 2

Théorème

Les crochets de Poisson en dimension 2 sont exactement de la forme

$$\{f, g\} = \varphi \times \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

où $\varphi \in \mathcal{F}(V)$.

Proposition

Si $\varphi \neq 0$, alors les casimirs sont exactement les fonctions constantes.

Dimension 3

On se place dans le cas $\dim(V) = 3$.

Exemple

Soient $\varphi, \chi \in \mathcal{F}(V)$. Alors

$$\{f, g\}_{\chi,\varphi} = \chi \times \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

est un crochet de Poisson.

Démonstration

La bilinéarité, l'antisymétrie et l'identité de Leibniz sont clairement vérifiées.

Démonstration

La bilinéarité, l'antisymétrie et l'identité de Leibniz sont clairement vérifiées.

Soit $J(f,g,h) = \{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\}$ le *jacobiateur* de (f,g,h).

Démonstration

La bilinéarité, l'antisymétrie et l'identité de Leibniz sont clairement vérifiées.

Soit $J(f,g,h) = \{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\}$ le *jacobiateur* de (f,g,h).

J est une tridérivation antisymétrique, donc est déterminée par $J(x,y,z)$.

Démonstration

La bilinéarité, l'antisymétrie et l'identité de Leibniz sont clairement vérifiées.

Soit $J(f,g,h) = \{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\}$ le *jacobiateur* de (f,g,h).

J est une tridérivation antisymétrique, donc est déterminée par $J(x,y,z)$.

Or $J(x,y,z) = 0$, donc $J = 0$, et donc $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson.

Proposition

Les crochets de Poisson en dimension 3 ne sont pas tous de la forme précédente.

Proposition

Les crochets de Poisson en dimension 3 ne sont pas tous de la forme précédente.

En effet,

$$\{f,g\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} & y \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{x}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}$$

n'est pas de cette forme

Théorème

Soit $\{\cdot,\cdot\}$ défini par

$$\{f,g\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} & F \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} & G \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} & H \end{vmatrix} \quad , \quad F, G, H \in \mathcal{F}(V)$$

Alors $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson si et seulement si $(\nabla \wedge \vec{E}) \cdot \vec{E} = 0$, où $\vec{E} = (F, G, H)$.

Théorème

Soit $\{\cdot,\cdot\}$ défini par

$$\{f,g\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} & F \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} & G \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} & H \end{vmatrix} \quad , \quad F, G, H \in \mathcal{F}(V)$$

Alors $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson si et seulement si $(\nabla \wedge \vec{E}) \cdot \vec{E} = 0$, où $\vec{E} = (F, G, H)$.

Cela est vérifié par exemple pour $\vec{E}$ de la forme $\chi \nabla \varphi$.

Crochet de Nambu

Définition : Crochet de Nambu

Un *crochet de Nambu* d'ordre k sur V est une k-dérivation antisymétrique qui vérifie l'identité fondamentale

$$\forall F_1, \ldots, F_{k-1}, G_1, \ldots, G_k \in \mathcal{F}(V),$$

$$\{F_1, \ldots, F_{k-1}, \{G_1, \ldots, G_k\}\} \\ = \sum_{i=1}^{k} \{G_1, \ldots, G_{i-1}, \{F_1, \ldots, F_{k-1}, G_i\}, G_{i+1}, \ldots, G_k\} \tag{IF}$$

On remarque que IF pour $k = 2$ est exactement l'identité de Jacobi.

Un crochet de Nambu d'ordre 2 est donc un crochet de Poisson.

Exemple

Le crochet sur V de dimension $n \geq 3$ défini par

$$\{F_1, \ldots, F_n\} = \chi \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \qquad \chi \in \mathcal{F}(V)$$

est un crochet de Nambu d'ordre n.

Idée de démonstration

Montrons IF (les autres propriétés sont évidentes).

Idée de démonstration

Montrons IF (les autres propriétés sont évidentes).

Soit $N : \mathcal{F}(V)^{2n-1} \to \mathcal{F}(V)$ définie par

$$\begin{aligned} N(F_1, \ldots, F_{n-1}, G_1, \ldots, G_n) \\ &= \{F_1, \ldots, F_{n-1}, \{G_1, \ldots, G_n\}\} \\ &- \sum_{i=1}^{n} \{G_1, \ldots, G_{i-1}, \{F_1, \ldots, F_{n-1}, G_i\}, G_{i+1}, \ldots, G_n\} \end{aligned}$$

Idée de démonstration

Montrons IF (les autres propriétés sont évidentes).

Soit $N : \mathcal{F}(V)^{2n-1} \to \mathcal{F}(V)$ définie par

$$
\begin{aligned}
N(F_1, \ldots, F_{n-1}, G_1, \ldots, G_n) \\
&= \{F_1, \ldots, F_{n-1}, \{G_1, \ldots, G_n\}\} \\
&- \sum_{i=1}^{n} \{G_1, \ldots, G_{i-1}, \{F_1, \ldots, F_{n-1}, G_i\}, G_{i+1}, \ldots, G_n\}
\end{aligned}
$$

IF est équivalente à la nullité de N.

Soient $F_1, \ldots, F_{n-1} \in \mathcal{F}(V)$.

Alors $(G_1, \ldots, G_n) \mapsto N(F_1, \ldots, F_{n-1}, G_1, \ldots, G_n)$ est une n-dérivation antisymétrique en dimension n, et est donc entièrement déterminée par sa valeur en $(x_1, \ldots, x_n)$.

Soient $F_1, \ldots, F_{n-1} \in \mathcal{F}(V)$.

Alors $(G_1, \ldots, G_n) \mapsto N(F_1, \ldots, F_{n-1}, G_1, \ldots, G_n)$ est une n-dérivation antisymétrique en dimension n, et est donc entièrement déterminée par sa valeur en $(x_1, \ldots, x_n)$.

Comme $\chi = \{x_1, \ldots, x_n\}$, la nullité de N va s'écrire :

$$\{F_1, \ldots, F_{n-1}, \chi\} = \chi \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\{F_1, \ldots, F_{n-1}, x_i\}$$

et cette égalité est vérifiée.

De Nambu à Poisson

Théorème

Soient $\{\cdot, \ldots, \cdot\}$ une structure de Nambu d'ordre k sur V et $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}$ des fonctions de $\mathcal{F}(V)$.

Alors $(f, g) \mapsto \{f, g, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-2}\} = \{f, g\}_{(\varphi_i)}$ définit une structure de Poisson sur V, appelée *structure de Nambu-Poisson*.

Ce théorème et l'exemple précédent nous montrent que pour tous $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$,

$$\{F, G\} = \chi \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} & \frac{\partial G}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

est un crochet de Poisson sur V.

Matrice de Poisson et rang

Définition : Matrice de Poisson

$\mathrm{mat}_{\mathcal{X}}(\{\cdot,\cdot\}) = (\{x_i, x_j\})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice de Poisson de $\{\cdot,\cdot\}$.

Matrice de Poisson et rang

Définition : Matrice de Poisson

$\mathrm{mat}_{\rightsquigarrow}(\{\cdot,\cdot\}) = (\{x_i, x_j\})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice de Poisson de $\{\cdot,\cdot\}$.

$\mathrm{mat}^m_{\rightsquigarrow}(\{\cdot,\cdot\}) = (\{x_i, x_j\}(m))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice de Poisson de $\{\cdot,\cdot\}$ en m.

Matrice de Poisson et rang

Définition : Matrice de Poisson

$\mathrm{mat}_{\leadsto}(\{\cdot,\cdot\}) = (\{x_i, x_j\})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice de Poisson de $\{\cdot,\cdot\}$.

$\mathrm{mat}_{\leadsto}^{m}(\{\cdot,\cdot\}) = (\{x_i, x_j\}(m))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice de Poisson de $\{\cdot,\cdot\}$ en m.

Définition : Rang

Le rang de $\{\cdot,\cdot\}$ en m $\mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\})$ est le rang de la matrice $\mathrm{mat}_{\leadsto}^{m}(\{\cdot,\cdot\})$.

Matrice de Poisson et rang

Définition : Matrice de Poisson

$\mathrm{mat}_{\leadsto}(\{\cdot,\cdot\}) = (\{x_i, x_j\})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice de Poisson de $\{\cdot,\cdot\}$.

$\mathrm{mat}_{\leadsto}^{m}(\{\cdot,\cdot\}) = (\{x_i, x_j\}(m))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice de Poisson de $\{\cdot,\cdot\}$ en m.

Définition : Rang

Le rang de $\{\cdot,\cdot\}$ en m $\mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\})$ est le rang de la matrice $\mathrm{mat}_{\leadsto}^{m}(\{\cdot,\cdot\})$.

Le rang de $\{\cdot,\cdot\}$ est $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\}) = \max\limits_{m\in V} \mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\})$

Propriétés

- $\forall f, g \in \mathcal{F}(V),\ \{f, g\} = (\nabla f)\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\{\cdot,\cdot\})\,{}^t(\nabla g)$

Propriétés

- $\forall f, g \in \mathcal{F}(V),\ \{f, g\} = (\nabla f)\, \mathrm{mat}_{\text{🐟}}(\{\cdot,\cdot\})\, {}^t(\nabla g)$
- $\mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\})$ et $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\})$ sont toujours pairs

Propriétés

- $\forall f, g \in \mathcal{F}(V),\ \{f, g\} = (\nabla f)\, \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\{\cdot,\cdot\})\, {}^t(\nabla g)$
- $\mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\})$ et $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\})$ sont toujours pairs
- $\mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\}) = \dim(\mathrm{Ham}_m(\{\cdot,\cdot\}))$

Propriétés

- $\forall f, g \in \mathcal{F}(V),\ \{f, g\} = (\nabla f)\,\mathrm{mat}_{\circledast}(\{\cdot,\cdot\})\,{}^{t}(\nabla g)$
- $\mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\})$ et $\mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\})$ sont toujours pairs
- $\mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\}) = \dim(\mathrm{Ham}_m(\{\cdot,\cdot\}))$

Pour montrer le troisième point, il suffit de considérer l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(\mathrm{mat}^m_{\circledast}) & \longrightarrow & \mathrm{Ham}_m(V) \\ x & \longmapsto & (f \mapsto (\nabla f)(m) \cdot x) \end{array}$$

Théorème

Soit $\{\cdot,\cdot\}$ un crochet de Poisson de rang $2r$ sur V de dimension n. Soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_s$ des casimirs. Supposons qu'il existe m où le rang est maximal tel que $(\nabla\varphi_1(m),\ldots,\nabla\varphi_s(m))$ soit libre. Alors

$$2r \leqslant n - s$$

Démonstration

Soit la fonction

$$\Phi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathrm{Ham}_m(V) \\ x & \longmapsto & \left(f \mapsto (\nabla f)(m) \cdot \mathrm{mat}^m_{\text{🐟}} \cdot x\right) \end{array}$$

Démonstration

Soit la fonction

$$\Phi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathrm{Ham}_m(V) \\ x & \longmapsto & (f \mapsto (\nabla f)(m) \cdot \mathrm{mat}^m_{\text{🐟}} \cdot x) \end{array}$$

Par théorème du rang, on a

$$n = \dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Rk}(\Phi)$$

Démonstration

Soit la fonction

$$\Phi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathrm{Ham}_m(V) \\ x & \longmapsto & (f \mapsto (\nabla f)(m) \cdot \mathrm{mat}^m_{\text{🐟}} \cdot x) \end{array}$$

Par théorème du rang, on a

$$n = \dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Rk}(\Phi)$$

La proposition précédente nous donne

$$\mathrm{Rk}(\Phi) = \mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\}) = \mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\})$$

Démonstration

Soit la fonction

$$\Phi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathrm{Ham}_m(V) \\ x & \longmapsto & (f \mapsto (\nabla f)(m) \cdot \mathrm{mat}^{m}_{\text{🐟}} \cdot x) \end{array}$$

Par théorème du rang, on a

$$n = \dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Rk}(\Phi)$$

La proposition précédente nous donne

$$\mathrm{Rk}(\Phi) = \mathrm{Rk}_m(\{\cdot,\cdot\}) = \mathrm{Rk}(\{\cdot,\cdot\})$$

L'hypothèse nous donne

$$\dim \mathrm{Ker}(\Phi) \geqslant s$$

Exemple

Le crochet défini par

$$\{F, G\} = \chi \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} & \frac{\partial G}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

est de rang 0 ou 2.

Exemple

Le crochet défini par

$$\{F, G\} = \chi \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} & \frac{\partial G}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

est de rang 0 ou 2.

En effet, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$ sont des casimirs, et donc le théorème précédent s'applique.

Crochets de Poisson polynomiaux

Définition : Crochet de Poisson polynomial

On appelle *crochet de Poisson polynomial* un crochet de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ vérifiant

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \{x_i,x_j\} \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$$

Crochets de Poisson polynomiaux

Définition : Crochet de Poisson polynomial

On appelle *crochet de Poisson polynomial* un crochet de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ vérifiant

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \{x_i, x_j\} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

De plus, si chacun de ces crochets ne contient que des termes de degré k, alors on dit que $\{\cdot,\cdot\}$ est *homogène de degré k*.

Les crochets constants

Théorème

N'importe quelle matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ antisymétrique est la matrice de Poisson d'un crochet constant.

Les crochets constants

Théorème

N'importe quelle matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ antisymétrique est la matrice de Poisson d'un crochet constant.

Démonstration

Tous les crochets $\{x_i, \{x_j, x_k\}\}$ sont nuls, et donc l'identité de Jacobi est trivialement vérifiée.

Les crochets linéaires

Théorème

Il existe une correspondance biunivoque entre les algèbres de Lie de dimension finie sur V^* et les crochets de Poisson linéaires sur V.

Les crochets linéaires

Théorème

Il existe une correspondance biunivoque entre les algèbres de Lie de dimension finie sur V^* et les crochets de Poisson linéaires sur V.

Démonstration

Si $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson linéaire sur V, alors $\left(V^*, \{\cdot,\cdot\}|_{V^*\times V^*}\right)$ est une algèbre de Lie.

Les crochets linéaires

Théorème

Il existe une correspondance biunivoque entre les algèbres de Lie de dimension finie sur V^* et les crochets de Poisson linéaires sur V.

Démonstration

Si $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson linéaire sur V, alors $\left(V^*, \{\cdot,\cdot\}|_{V^*\times V^*}\right)$ est une algèbre de Lie.

Réciproquement, l'isomorphisme entre $(V^*)^*$ et V nous permet de passer d'un crochet de Lie sur V^* à un crochet de Poisson sur V.

Exemple

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ (*i.e.* l'ensemble des matrices 2×2 de trace nulle, muni du crochet $[A, B] = AB - BA$), de base

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ (*i.e.* l'ensemble des matrices 2×2 de trace nulle, muni du crochet $[A, B] = AB - BA$), de base

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $[X, Y] = 2Y$, $[X, Z] = -2Z$ et $[Y, Z] = X$

Exemple

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ (*i.e.* l'ensemble des matrices 2×2 de trace nulle, muni du crochet $[A, B] = AB - BA$), de base

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $[X, Y] = 2Y$, $[X, Z] = -2Z$ et $[Y, Z] = X$

Le crochet de Poisson linéaire associé à $\mathfrak{g}$ a donc pour matrice de Poisson

$$\begin{pmatrix} 0 & 2y & -2z \\ -2y & 0 & x \\ 2z & -x & 0 \end{pmatrix}$$

Crochet quadratique diagonal

Définition : Crochet quadratique diagonal

On appelle *crochet de Poisson quadratique diagonal* un crochet de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ vérifiant

$$\exists (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n},\ \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \{x_i,x_j\} = a_{i,j}x_ix_j.$$

Théorème

Soit $M = (a_{i,j}x_ix_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tous i et j.
Alors M est une matrice de Poisson

Théorème

Soit $M = (a_{i,j}x_ix_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tous i et j. Alors M est une matrice de Poisson

Démonstration

Un simple calcul des Jacobiateurs de x_i, x_j et x_k donne le résultat.

Références I

Khaoula Ben Adbeljelil :
L'intégrabilité des réseaux de 2-Toda et de Full Kostant-Toda périodique pour toute algèbre de Lie simple.
Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2010.

Jean-Paul Dufour et Nguyen Tien Zung :
Poisson Structure and Their Normal Forms.
Birkhäuser, 1972.

Jean-Paul Dufour et Aissa Wade :
Formes normales de structures de Poisson ayant un 1-jet nul en un point.
1997.

James E. Humphrey :
Introduction to Lie Algebra and Representation Theory.
Springer, 1972.

Références II

Jacques Lafontaine :
Introduction aux variétés différentielles.
Edp Sciences, 1996.

Pol Vanhaecke :
Integrable Systems in the realm of Algebraic Geometry.
Springer, 2001.

Pol Vanhaecke, Camille Laurent-Gengoux et Anne Pichereau :
An invitation to Poisson structures.
2010.