Théorie des types homotopiques

Kevin Quirin

15 octobre 2014

Raconte-nous une histoire. . .

- Preuves incertaines, ou pratiquement non vérifiables :
  - Théorème de Jordan
  - Théorème des quatre couleurs
  - Théorème de Feit-Thomson

- Preuves incertaines, ou pratiquement non vérifiables :
  - Théorème de Jordan
  - Théorème des quatre couleurs
  - Théorème de Feit-Thomson
- Assistants de preuves :
  - Théorème de Jordan (TC. Hales)
  - Théorème des quatre couleurs (G. Gonthier et al.)
  - Théorème de Feit-Thomson (G. Gonthier et al.)

- Preuves incertaines, ou pratiquement non vérifiables :
  - Théorème de Jordan
  - Théorème des quatre couleurs
  - Théorème de Feit-Thomson
- Assistants de preuves :
  - Théorème de Jordan (TC. Hales)
  - Théorème des quatre couleurs (G. Gonthier et al.)
  - Théorème de Feit-Thomson (G. Gonthier et al.)

On utilise l'assistant Coq, basé sur MLTT.

Pourquoi les mathématiciens n'utilisent pas les assistants de preuves ?

- Peu de bibliothèques
- Logique intuitionniste, et problème d'égalité dans MLTT

Pourquoi les mathématiciens n'utilisent pas les assistants de preuves ?

- Peu de bibliothèques
- Logique intuitionniste, et problème d'égalité dans MLTT

Le premier problème est un “problème récursif”.

On peut résoudre certains aspects du second problème en rajoutant des axiomes à Coq, mais on soulève alors de nouveaux problèmes

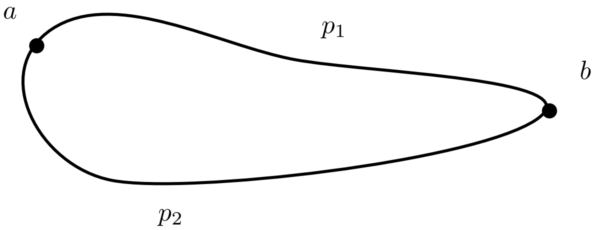
On peut résoudre certains aspects du second problème en rajoutant des axiomes à Coq, mais on soulève alors de nouveaux problèmes

- consistance
- extraction
- automatisation

On tente donc, avec HoTT, de changer les fondations théoriques de Coq.

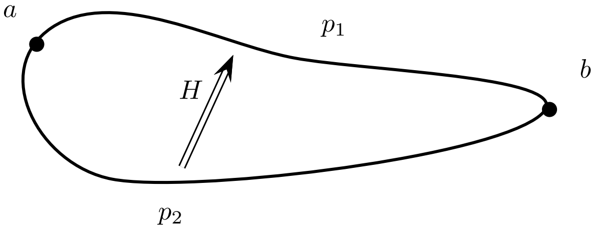
On tente donc, avec HoTT, de changer les fondations théoriques de Coq.

Pour l'instant, on peut simuler HoTT dans Coq, en définissant les égalités comme des homotopies.



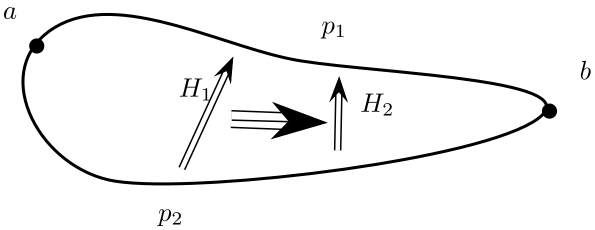
On tente donc, avec HoTT, de changer les fondations théoriques de Coq.

Pour l'instant, on peut simuler HoTT dans Coq, en définissant les égalités comme des homotopies.



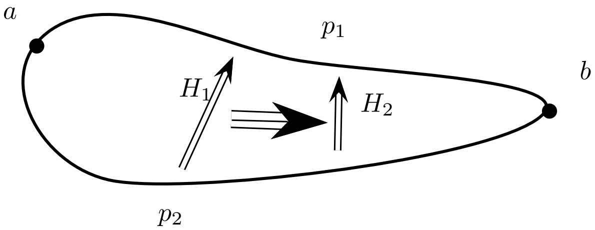
On tente donc, avec HoTT, de changer les fondations théoriques de Coq.

Pour l'instant, on peut simuler HoTT dans Coq, en définissant les égalités comme des homotopies.



On tente donc, avec HoTT, de changer les fondations théoriques de Coq.

Pour l'instant, on peut simuler HoTT dans Coq, en définissant les égalités comme des homotopies.



On ajoute aussi à Coq l'*axiome d'univalence de Voevodsky*

Definition univalence := $\forall\ T, U$: Type, $T \sim U \to T = U$.

On note qu'on ne peut pas omettre les chemins entre les chemins (*i.e* les preuves d'égalité de preuves d'égalité) :

On note qu'on ne peut pas omettre les chemins entre les chemins (*i.e* les preuves d'égalité de preuves d'égalité) : on est dans un cadre *proof-relevant*.

On note qu'on ne peut pas omettre les chemins entre les chemins (*i.e* les preuves d'égalité de preuves d'égalité) : on est dans un cadre *proof-relevant*.

HoTT n'est donc pas basée sur les mathématiques "usuelles" (topos), mais sur les mathématiques "supérieures" (higher topos).

Cette *proof-relevance* oblige à supposer l'existence des types inductifs d'ordre supérieur (HIT).

On peut définir un type par induction, en donnant non seulement ses constructeurs, mais aussi des constructeurs de ses espaces de chemins.

Cette *proof-relevance* oblige à supposer l'existence des types inductifs d'ordre supérieur (HIT).

On peut définir un type par induction, en donnant non seulement ses constructeurs, mais aussi des constructeurs de ses espaces de chemins.

EXEMPLE – On définit le cercle $\mathbb{S}^1$:

$$\mathbb{S}^1 = \left| \begin{array}{l} \mathit{base} : \mathbb{S}^1 \\ \mathit{loop} : \mathit{base} = \mathit{base} \end{array} \right.$$

En théorie des types homotopiques, on adopte la vision *propositions as types* : les propositions ne sont qu'un cas particulier de type.

En théorie des types homotopiques, on adopte la vision *propositions as types* : les propositions ne sont qu'un cas particulier de type. Une preuve d'une proposition n'est donc qu'un habitant du type correspondant : si cette proposition a plusieurs habitants distincts, elle peut donc avoir plusieurs preuves distinctes.

Pour pouvoir faire des mathématiques usuelles, on introduit deux types particuliers :

Pour pouvoir faire des mathématiques usuelles, on introduit deux types particuliers :

- Les *hpropositions* :

$$\mathrm{HProp} := \{T : \mathrm{Type} \mid \forall p, q : T,\ p = q\}$$

Pour pouvoir faire des mathématiques usuelles, on introduit deux types particuliers :

- Les *hpropositions* :

$$\mathrm{HProp} := \{T : \mathrm{Type} \mid \forall p, q : T,\ p = q\}$$

- Les *hsets* :

$$\mathrm{HSet} := \{T : \mathrm{Type} \mid \forall a, b : T,\ \mathrm{IsHProp}(a = b)\}.$$

Pour pouvoir faire des mathématiques usuelles, on introduit deux types particuliers :

- Les *hpropositions* :

$$\mathrm{HProp} := \{T : \mathrm{Type} \mid \forall p, q : T,\ p = q\}$$

- Les *hsets* :

$$\mathrm{HSet} := \{T : \mathrm{Type} \mid \forall a, b : T,\ \mathrm{IsHProp}(a = b)\}.$$

En se limitant aux hsets, on retrouve un cadre *proof-relevant*, plus pratique à utiliser.

Projets

Plusieurs projets voient le jour :

- La formalisation des mathématiques dans HoTT (S. Awodey 2014 – ?)
- La formalisation des mathématiques constructives (T. Coquand 2010 – 2015)

Références

- Homotopy Type Theory : http ://homotopytypetheory.org/book/
- https ://golem.ph.utexas.edu/category/
- `http://www.math.ias.edu/~vladimir/Site3/Univalent_Foundations_files/2014_IAS.pdf`
- Les pages des HoTTistes (V. Voevodsky, M. Schulman, S. Awodey, A. Bauer, . . .)