

# Le théorème de Jordan

Kevin QUIRIN et Ophélie ROUBY

Travail effectué dans le cadre du Ter sous la direction d'Antoine CHAMBERT-LOIR

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>Qui était Jordan ?</b>	<b>3</b>
<b>1 Énoncé du théorème de Jordan</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction . . . . .	4
1.2 Énoncé du théorème . . . . .	5
<b>2 Démonstration du théorème de Jordan</b>	<b>5</b>
2.1 Les polygones . . . . .	5
2.1.1 Premières définitions . . . . .	5
2.1.2 Fonction parité . . . . .	6
2.1.3 Fonction parité pour des arcs polygonaux . . . . .	8
2.1.4 Ajout d'un arc polygonal à un polygone . . . . .	9
2.1.5 Joindre un polygone de haut en bas . . . . .	11
2.1.6 Intérieur de polygones perturbés . . . . .	12
2.2 Construction de tubes . . . . .	13
2.2.1 Comment séparer des polygones ? . . . . .	15
2.2.2 Cas d'une seule composante . . . . .	16
2.3 Approximation polygonale . . . . .	18
2.3.1 Uniforme continuité . . . . .	18
2.3.2 Approximation d'une courbe de Jordan . . . . .	19
2.4 Construction d'un point intérieur . . . . .	20
2.4.1 Les constantes $\beta$ et $w$ . . . . .	20
2.4.2 Construction de $\theta_0$ et $\theta_\infty$ . . . . .	20
2.5 Construction d'un intérieur et d'un extérieur . . . . .	22
2.5.1 Vérification des quatre propriétés . . . . .	23
<b>3 Application du théorème de Jordan</b>	<b>25</b>
<b>Conclusion</b>	<b>27</b>



## Introduction

Mettons-nous le temps de cet article dans la peau d'un berger, alerté par l'arrivée d'un loup. Naturellement, tout le monde construirait une clôture (fermée) qui enfermerait les chèvres, et qui serait assez solide pour empêcher le loup de la traverser. Le loup pourra-t-il alors manger notre troupeau? L'intuition nous dit que non, et nous allons tenter de le démontrer. Pour ce faire, nous avons besoin de l'aide de Camille Jordan.

## Qui était Camille Jordan ?



FIGURE 1 – Marie Ennemond Camille Jordan

Marie Ennemond Camille Jordan est né le 5 janvier 1838 à Lyon (en France) et est mort le 22 janvier 1922 à Paris.

Camille Jordan est issu d'une famille assez connue, son père était ingénieur et sa mère était la soeur d'un peintre de renommé. Il est également le petit-fils du politicien Ennemond Camille Jordan.

Jordan entre à l'école Polytechnique (comme son père avant lui) en 1855 et se destine à devenir ingénieur, comme beaucoup de mathématiciens français de l'époque. Cependant, Jordan arrive à combiner son travail d'ingénieur et des travaux de recherche en mathématiques. Il effectue une thèse soutenue en 1861 composée de deux parties, l'une : *Sur le nombre des valeurs des fonctions* et l'autre : *Sur des périodes des fonctions inverses des intégrales des différentielles algébriques*.

Camille Jordan se marie en 1862 avec Marie-Isabelle Munet, ils ont ensemble huit enfants.

À partir de 1876, Jordan devient professeur d'analyse à l'école Polytechnique, il est également

professeur au Collège de France entre 1883 et 1885, c'est d'ailleurs durant cette période que la majorité de ses travaux de recherche fut effectuée.

Jordan est un mathématicien qui a travaillé sur différents domaines des mathématiques, principalement sur les groupes finis, l'algèbre linéaire et multilinéaire, la théorie des nombres, la topologie des polyèdres, les équations différentielles et la mécanique.

En topologie notamment les travaux de Jordan ont joué un rôle majeur, c'est lui qui, entre autres, a introduit la notion d'homotopie des chemins et de groupe d'homotopie.

Jordan s'est particulièrement intéressé à la théorie des groupes finis. D'ailleurs avant qu'il commence à effectuer des recherches dans ce domaine, il n'existait pas vraiment de théorie des groupes finis. C'est lui qui fut le premier à développer ce sujet, cependant on s'y intéressa seulement à partir de 1846 après qu'une republication des travaux de Galois fut effectuée. La majorité des travaux de Jordan se trouve dans un ouvrage intitulé *Traité des substitutions et des équations algébriques* qui fut publié en 1870 et fut récomposé par le Prix Poncelet de l'Académie des Sciences.

Jordan est aujourd'hui surtout connu pour sa démonstration de ce qu'on appelle le théorème de Jordan, qui fut publiée dans la troisième édition de son livre *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* entre 1909 et 1915.

Parmi les nombreuses contributions de Jordan en analyse, on peut mentionner sa généralisation du critère de convergence des séries de Fourier.

Jordan devint également l'éditeur du *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* à partir de 1885, après la mort de Liouville et ce jusqu'à sa propre mort.

Jordan reçut également la légion d'honneur en 1890 et fut nommé Président honoraire du Congrès des mathématiciens à Strasbourg en 1920.

# 1 Énoncé du théorème de Jordan

## 1.1 Introduction

Nous nous sommes ici intéressés au théorème dit de Jordan et plus précisément à la démonstration originale faite par Jordan. Il faut savoir que cette démonstration a pendant longtemps et continue d'ailleurs d'être sujette à des débats quant à sa véracité. Nous allons voir que finalement on peut très largement s'en inspirer et construire de la sorte une démonstration du théorème tout à fait correcte. À l'heure actuelle, il existe plusieurs démonstrations de ce théorème, notamment une faisant appel au théorème du point fixe de Brouwer, ou encore une autre se basant sur l'analyse complexe. Nous terminerons ensuite par un exemple concret d'application du dit théorème.

## 1.2 Énoncé du théorème

Énonçons tout d'abord le théorème de Jordan.

### **Théorème 1.1**

*Le complémentaire de l'image d'une courbe de Jordan est l'union de deux ensembles ouverts, non vides, connexes et disjoints.*

Jordan l'avait énoncé de la manière suivante :

toute courbe [fermée] continue [et sans point multiple] divise le plan en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure, cette dernière ne pouvant se réduire à zéro.

dans son Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.

## 2 Démonstration du théorème de Jordan

### 2.1 Les polygones

Tout d'abord, nous allons nous intéresser à l'étude des polygones, puis nous ferons le lien entre ces derniers et une courbe de Jordan, dans une partie postérieure.

#### 2.1.1 Premières définitions

Introduisons dans un premier temps, les notions de base qui nous seront utiles par la suite.

#### **Définition 2.1**

*Une courbe simple fermée  $\mathcal{J}$ , aussi appelée courbe de Jordan est l'image d'une application continue et bijective :*

$$j : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

*Chaque courbe admet une paramétrisation fixée :*

$$\phi_J : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

*On appelle  $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  le paramètre de temps.*

**Remarque :** Par abus de notation, on écrira dans toute la suite  $J(t) \in \mathbb{R}^2$  au lieu de  $\phi_J(t)$ , on utilisera donc la même notation pour la fonction  $\phi_J$  et son image.



FIGURE 2 – Exemples d’une courbe de Jordan (celle de gauche) et d’une courbe qui ne l’est pas (celle de droite, car elle admet un point double, donc ne peut pas être simple).

**Définition 2.2**

On dit que  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , s’il existe un intervalle  $[t, t'] \subset \mathbb{R}$  avec  $0 < t' - t < \frac{1}{2}$  tel que  $I$  soit l’image de  $[t, t']$  par la projection canonique sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

**Remarque :** Avec la définition précédente, un intervalle est uniquement déterminé dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  par ses extrémités.

On adopte alors la convention suivante : lorsque deux paramètres de valeurs distinctes  $t, t' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  sont utilisés de manière symétrique, on peut les échanger si nécessaire et les identifier avec leurs représentations réelles de telle sorte que  $0 < t' - t < \frac{1}{2}$ .

**Définition 2.3**

Un polygone est une courbe de Jordan qui est un sous-ensemble d’une union finie de lignes.

**Définition 2.4**

Un chemin polygonal est une application continue  $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui est un sous-ensemble d’une union finie de lignes.

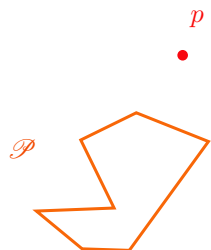
C’est un arc polygonal si l’application est bijective.

**2.1.2 Fonction parité**

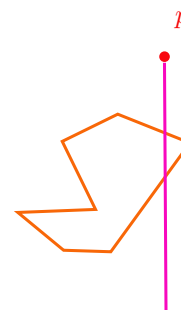
Le théorème de Jordan pour les polygones est un théorème connu depuis longtemps. Pour le démontrer nous avons besoin d’introduire une fonction non constante mais localement constante, ce que nous appellerons la fonction parité.

**Lemme 2.5**

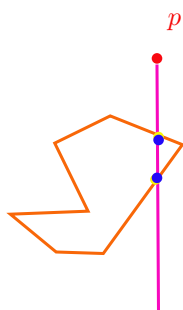
Soit  $\mathcal{P}$  un polygone. Alors il existe une fonction localement constante sur le complémentaire de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui prend deux valeurs distinctes.



étape 1 : on considère un point  $p \notin \mathcal{P}$ .



étape 2 : on trace la ligne verticale partant de  $p$ .



On a 2 intersections donc  $p$  est pair.

étape 3 : on compte le nombre d'intersections entre la droite et le polygone.

FIGURE 3 – Construction de la fonction parité.

#### DÉMONSTRATION

Construisons une telle fonction.

On considère une ligne verticale partant d'un point  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}$ . On définit la parité de ce point comme étant le nombre d'intersections entre  $\mathcal{P}$  et la ligne verticale partant de  $p$ . Ceci définit ainsi une fonction.

Cette fonction peut s'étendre en une fonction sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}$ .

Si la ligne verticale partant de  $p$  intersecte  $\mathcal{P}$  au niveau d'un angle, un petit déplacement horizontal de la ligne verticale permet d'éviter ce point (on peut justifier cela par le fait que la parité ne change pas selon si la ligne coupe deux fois  $\mathcal{P}$  ou pas, au voisinage de cet angle).

Ce fait que la parité de  $p$  ne dépend pas de petits déplacements de la ligne partant de ce point, nous donne la constance locale de notre fonction.

La fonction parité prend donc deux valeurs distinctes selon le nombre d'intersections avec  $\mathcal{P}$ .

**Remarque :** On utilise dans la suite les termes d'intérieur et d'extérieur d'un polygone qui correspondent respectivement à une parité impaire et paire de la fonction construite ci-dessus.



Maintenant que nous avons démontré l'existence d'une fonction parité, nous pouvons établir quelques-une de ses propriétés.

**Proposition 2.6**

- La parité d'un point  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}$  ne dépend pas de la ligne choisie.
- Tout point de la composante extérieure d'un polygone est pair.
- Si un arc polygonal  $\mathcal{L}$  allant de  $p$  à  $q$  intersecte un polygone  $\mathcal{P}$   $m$  fois, alors  $p$  et  $q$  ont même parité si et seulement si  $m$  est pair.

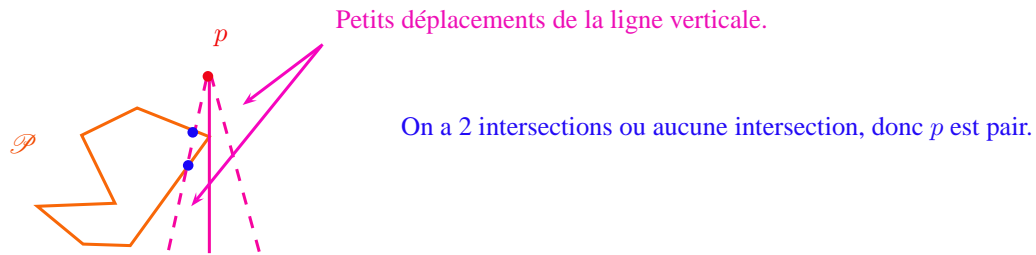


FIGURE 4 – Cas où la droite verticale issue d'un point  $p$  passe par un sommet du polygone.

DÉMONSTRATION

La première assertion se démontre en utilisant le fait qui suit, vu dans la démonstration du lemme précédent. Si on considère un point  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}$  et une ligne partant de ce point, alors on sait qu'un petit déplacement de cette ligne ne change pas la parité du point  $p$ . Ainsi "par récurrence" quelle que soit la ligne partant de  $p$  que l'on considère, elle ne change pas la parité de  $p$ .

La deuxième propriété se démontre en utilisant le fait que quel que soit le point que l'on considère dans la composante extérieure d'un polygone, on peut en particulier considérer une ligne partant de ce point et n'intersectant pas le polygone, ainsi ceci nous donne une parité paire pour notre point, et comme la parité ne dépend pas de la ligne choisie, on obtient le résultat voulu.

Enfin, si on considère un arc polygonal liant deux points  $p$  à  $q$ .

Si on suppose que cet arc intersecte un nombre pair de fois un polygone, alors si on considère l'arc comme étant une ligne partant de  $p$  cela signifie que  $p$  a une parité paire. Par le même raisonnement, on obtient aussi que la parité de  $q$  sera paire également.

On effectue la contraposée de la deuxième implication à montrer. On suppose maintenant que l'arc intersecte un nombre impair de fois un polygone, on obtient que  $p$  et  $q$  sont impairs.

**2.1.3 Fonction parité pour des arcs polygonaux**

Étendons maintenant la définition de la fonction parité.

Soit  $\mathcal{A}$  un arc polygonal dans le plan d'extrémités  $p$  et  $q$ .  
 Soient  $R_p$  et  $R_q$  les lignes verticales partant de  $p$  et  $q$  respectivement et dirigées vers le haut.  
 Alors par des arguments similaires à ceux utilisés pour les polygones, on peut prouver l'existence d'une fonction parité :  $x \mapsto \pi_{\mathcal{A}}(x)$  localement constante et bien définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{A} \cup R_p \cup R_q)$ , qui détermine la parité d'un point  $x$  en comptant le nombre d'intersections entre une ligne émanant de ce point et l'arc polygonal  $\mathcal{A}$ .

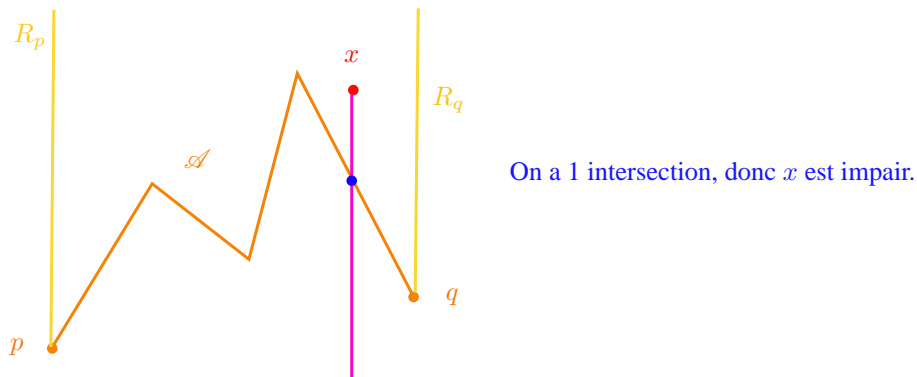


FIGURE 5 – Construction de la fonction parité pour un arc polygonal.

Quelques propriétés de cette fonction peuvent se dégager de sa définition :

**Proposition 2.7**

- Si  $\mathcal{L}$  est une ligne qui ne rencontre ni  $p$  ni  $q$ , alors la parité  $\pi_{\mathcal{A}}(x)$  ne dépend pas de  $x$ , pour tout  $x \in \mathcal{L}$ , ayant sa deuxième coordonnée assez grande.  
 On peut de la sorte parler de parité entre un arc polygonal  $\mathcal{A}$  et une ligne ne passant pas par les extrémités de  $\mathcal{A}$ .
- Si  $\mathcal{B}$  est un autre arc polygonal d'extrémités  $p$  et  $q$ , tel que  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  forme une courbe fermée simple, alors les conditions  $\pi_{\mathcal{A}}(x) = \pi_{\mathcal{B}}(x)$  et  $\pi_{\mathcal{A}}(x) \neq \pi_{\mathcal{B}}(x)$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup R_p \cup R_q)$  s'étendent en des conditions localement constantes sur  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ .
- On a  $\pi_{\mathcal{A}}(x) = \pi_{\mathcal{B}}(x)$  si et seulement si  $x$  est pair par rapport au polygone  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ .
- Si  $\mathcal{A}$  est un arc polygonal d'extrémités  $p$  et  $q$  et  $\mathcal{L}$  est une ligne ne passant ni par  $p$ , ni par  $q$ , alors la ligne  $\mathcal{L}$  rencontre  $\mathcal{A}$  un nombre impair de fois si et seulement si  $\mathcal{L}$  sépare les points  $p$  et  $q$ .

**2.1.4 Ajout d'un arc polygonal à un polygone**

Soient  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  des arcs polygonaux ayant mêmes extrémités  $p$  et  $q$ , mais ne s'intersectant pas sauf en  $p$  et  $q$ .

On a alors trois polygones formés par des paires d'arcs  $P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ,  $P(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  et  $P(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ .

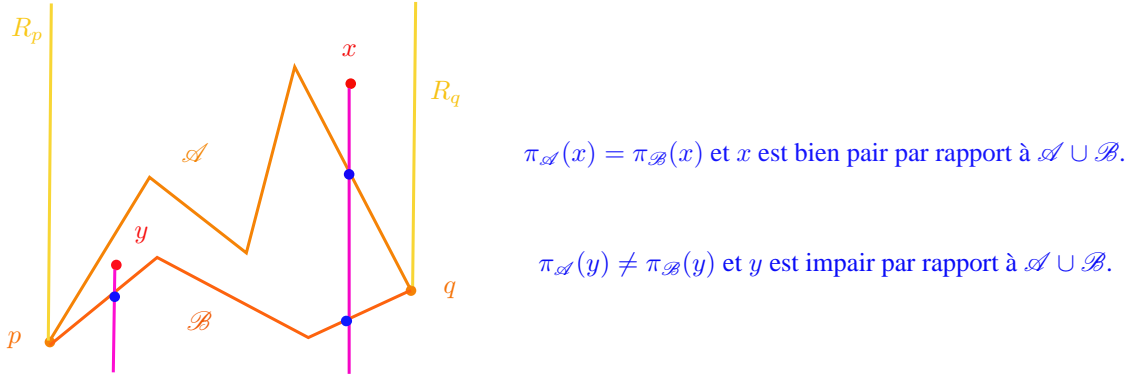


FIGURE 6 – Illustration de la troisième propriété.

Tous les points de  $\mathcal{A}$  (respectivement  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ) ont même parité par rapport à  $P(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  (respectivement  $P(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ ,  $P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ). On peut donc parler de la parité d'un arc polygonal par rapport au polygone formé des deux autres arcs.

Posons alors  $\pi_{\mathcal{A}}$ ,  $\pi_{\mathcal{B}}$  et  $\pi_{\mathcal{C}}$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup R_p \cup R_q)$  donnant la parité d'un point  $x$  via une ligne partant de ce point et intersectant les arcs  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ .

**Lemme 2.8**

Soit  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C})$  tel que  $x \notin P(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ .  
 Alors  $x \notin P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  si et seulement si  $x \notin P(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ .

DÉMONSTRATION

Dire que  $x \notin P(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  signifie plus précisément que  $\pi_{\mathcal{A}}(x) = \pi_{\mathcal{C}}(x)$ .  
 Or  $\pi_{\mathcal{A}}(x) = \pi_{\mathcal{C}}(x)$  implique que  $\pi_{\mathcal{A}}(x) = \pi_{\mathcal{B}}(x)$  si et seulement si  $\pi_{\mathcal{B}}(x) = \pi_{\mathcal{C}}(x)$ . D'où le résultat.

**Lemme 2.9**

Exactement un des arcs  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  ou  $\mathcal{C}$  a une parité impaire par rapport au polygone formé par les deux autres.

DÉMONSTRATION

Supposons que l'arc  $\mathcal{C}$  a une parité impaire par rapport à  $P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .  
 Montrons que  $\mathcal{A}$  a une parité paire par rapport à  $P(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ .  
 Considérons un point dans le plan approchant  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  tel que toutes les parités en ce point soient égales. Alors ce point rencontre tout d'abord soit  $\mathcal{A}$ , soit  $\mathcal{B}$ .  
 Si il rencontre tout d'abord  $\mathcal{A}$ , alors  $\mathcal{A}$  a bien une parité paire par rapport à  $P(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ .  
 Sinon, si il rencontre d'abord  $\mathcal{B}$ , cela signifie que  $\pi_{\mathcal{A}} = \pi_{\mathcal{C}}$  le long de  $\mathcal{B}$  d'après ce qu'on a vu précédemment. D'où  $\pi_{\mathcal{A}} \neq \pi_{\mathcal{B}}$  le long de  $\mathcal{C}$ .  
 Analysons maintenant un petit disque autour d'un point où se rencontrent  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , alors ces

conditions nous donnent  $\pi_{\mathcal{B}} = \pi_{\mathcal{C}}$  le long de  $\mathcal{A}$ .

D'un autre côté, on montre que si  $\mathcal{C}$  a une parité paire par rapport à  $P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  et si  $\mathcal{B}$  est pair par rapport à  $P(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ , alors  $\mathcal{A}$  est impair par rapport à  $P(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ . On établit cela de manière similaire à celle que nous avons utilisé précédemment. D'où le résultat voulu.

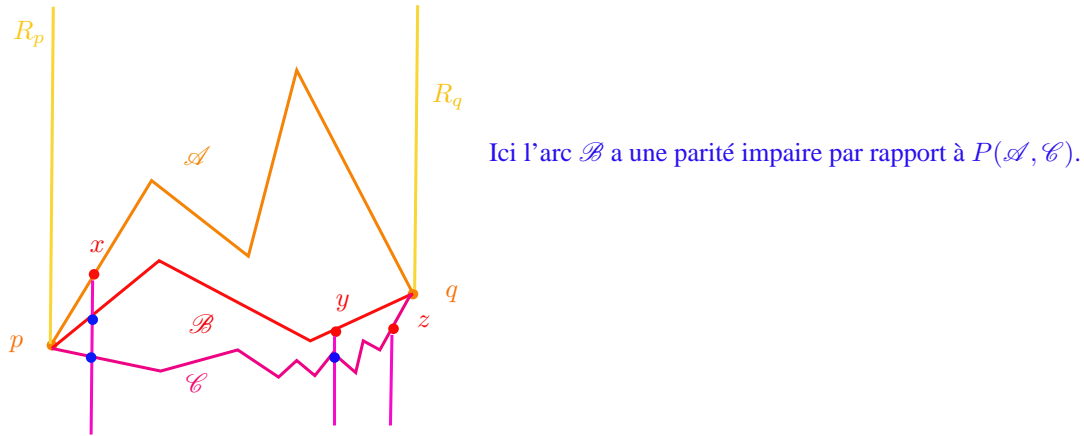


FIGURE 7 – Sur ce schéma, on voit que seul l'arc  $\mathcal{B}$  a une parité impaire par rapport au polygone formé par les deux autres arcs, ici  $P(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ .

### 2.1.5 Joindre un polygone de haut en bas

Dans le lemme qui suit nous allons joindre le segment "haut" du polygone à sa partie "basse" via un segment linéaire se trouvant à l'intérieur du polygone.

#### Lemme 2.10

Soit  $\mathcal{P}$  un polygone.

Soit  $\mathcal{L}$  une ligne verticale dans le plan telle qu'il existe un point  $p \in \mathcal{P}$  se trouvant à la gauche de cette ligne et un point  $q \in \mathcal{P}$  se trouvant à sa droite.

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux arcs polygonaux d'extrémités  $p$  et  $q$  (ce qui signifie que  $\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  et que  $\{p, q\} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ).

Alors il existe un segment  $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$  appartenant à la région intérieure du polygone (sauf en ses extrémités qui appartiennent à  $\mathcal{P}$ ) tel qu'une de ses extrémités appartienne à  $\mathcal{A}$  et l'autre à  $\mathcal{B}$ .

**Remarque :** On a vu précédemment qu'il existe une fonction parité bien définie pour une ligne et un polygone. Cette fonction est toujours bien définie même si la ligne passe par un sommet du polygone.

#### DÉMONSTRATION

Si on se déplace le long de la ligne  $\mathcal{L}$ , on intersecte l'une des branches du polygone  $\mathcal{A}$  ou  $\mathcal{B}$  avec

une certaine parité, puis une autre branche avec une autre parité, puis encore une branche avec une certaine parité etc ... . On considère la suite de ces parités :  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  (quitte à échanger  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , on se place dans le cas où cette suite commence par  $a_1$ ).

Puisque  $\mathcal{A}$  relie  $p$  à  $q$  qui sont des points de part et d'autre de  $\mathcal{L}$ , la somme des parités  $a_i$  est impaire. De même la somme des  $b_i$  l'est aussi. Ce qui signifie qu'on peut diviser la suite des parités après le premier terme impair. Par exemple si  $a_1$  et  $b_1$  sont pairs et  $a_2$  est impair, on divise la suite en  $a_1, b_1, a_2$  et  $b_2, a_3, b_3, \dots$ .

Géométriquement soit  $\mathcal{L}'$  le segment incliné dans  $\mathcal{L}$  qui relie la dernière intersection du premier groupe (disons ici  $a_1, b_1$  et  $a_2$ ) avec la première intersection du second groupe (ici  $b_2, a_3, b_3, \dots$ ). Alors il est clair que  $\mathcal{L}'$  a les propriétés voulues.

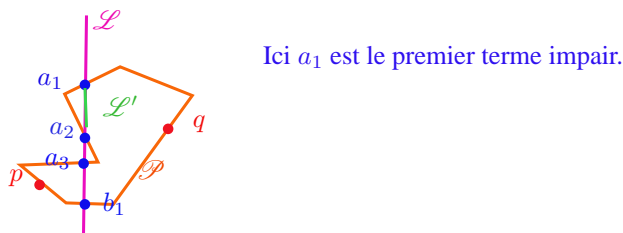


FIGURE 8 – Illustration de la construction d'une ligne à l'intérieur d'un polygone.

### 2.1.6 Intérieur de polygones perturbés

Dans cette partie, nous allons montrer qu'un point à l'intérieur d'un polygone se trouve aussi à l'intérieur d'un second polygone obtenu en perturbant le premier.

#### Lemme 2.11

Soit  $\mathcal{P}$  un polygone (paramétré en temps).

Soit  $p$  un point du complémentaire de  $\mathcal{P}$ .

Soit  $D$  la distance de  $p$  à  $\mathcal{P}$ .

Soit  $\mathcal{P}'$  un polygone (paramétré en temps) tel que :  $\forall t, d(\mathcal{P}(t), \mathcal{P}'(t)) < D$ .

Alors la parité de  $p$  par rapport à  $\mathcal{P}$  est égale à celle de  $p$  par rapport à  $\mathcal{P}'$ .

#### DÉMONSTRATION

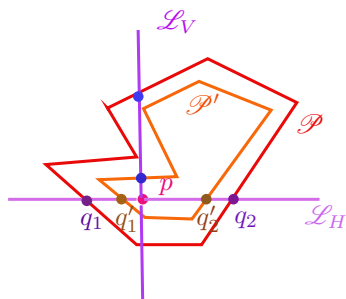
En perturbant le point  $p$  de telle façon que l'inégalité de l'énoncé du lemme soit préservée, on peut affirmer que la ligne horizontale  $\mathcal{L}_H$  passant par  $p$  rencontre  $\mathcal{P}$  un nombre fini de fois.

Soient ces points :  $q_1 = \mathcal{P}(t_1), q_2 = \mathcal{P}(t_2), \dots$  listés dans l'ordre cyclique autour de  $\mathcal{P}$ .

L'arc polygonal  $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}$  allant de  $q_i$  à  $q_{i+1}$  rencontre la ligne verticale  $\mathcal{L}_V$  passant par  $p$  avec une parité  $\pi_i$ .

Soient  $q'_i = \mathcal{P}'(t_i), \mathcal{P}'_i$  et  $\pi'_i$  les quantités correspondantes pour le polygone  $\mathcal{P}'$ .

Chaque point  $q_i$  est à une distance plus grande que  $\mathcal{P}$  du côté gauche ou droit de  $p$ . Puisque  $\mathcal{P}'$  approxime  $\mathcal{P}$  sous la distance  $D$ , chaque point  $q'_i$  est à gauche ou à droite de  $\mathcal{L}_V$  selon la place du point  $q_i$ . Donc la parité  $\pi_i$  qui correspond au nombre de croisements gauche-droite avec  $\mathcal{L}_V$  est



Ici  $\pi_1$  est impair et  $\pi'_1$  aussi.

FIGURE 9 – Illustration de la démonstration ci-dessous. On remarque, entre autre, que la parité de  $p$  par rapport à  $\mathcal{P}$  est bien la même que celle par rapport à  $\mathcal{P}'$ .

égale à  $\pi'_i$ .

Puisque  $q_i$  et  $q_{i+1}$  sont deux points consécutifs de  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ , tous les croisements de  $\mathcal{L}_V$  et  $\mathcal{P}_i$  ont une distance supérieure stricte à  $D$  au-dessus de  $\mathcal{L}_H$  ou une distance supérieure stricte à  $D$  en-dessous de  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ . Puisque  $\mathcal{P}'$  approxime  $\mathcal{P}$  sous la distance  $D$ , tous les croisements de  $\mathcal{P}'_i \cap \mathcal{L}_V$  sont au-dessus ou en-dessous de  $\mathcal{L}_H$  cela dépendant de là où se trouve  $\mathcal{P}_i$ .

Puisque  $\pi_i = \pi'_i$  et que tous les croisements de  $\mathcal{L}_V$  sont au-dessus ou en-dessous de  $\mathcal{P}_i$  et de  $\mathcal{P}'_i$ , alors pour tout  $i$ , il s'ensuit que la parité de  $p$  par rapport à  $\mathcal{P}$  est la même que la parité de  $p$  par rapport à  $\mathcal{P}'$ .

## 2.2 Construction de tubes

Dans cette partie, nous allons construire un système de tubes autour des arêtes d'un polygone  $\mathcal{P}$ .

### Définition 2.12

Soit  $r > 0$ .

Soit  $e$  une arête de  $\mathcal{P}$ .

De chaque côté de  $e$ , on construit une arête parallèle à  $e$ , à distance  $r$  et de même longueur que  $e$ .

On peut alors les relier par un demi-cercle, qu'on l'on note  $T_e$ . C'est ce qu'on appelle un tube.

Cet ensemble est précisément l'ensemble des points qui sont à une distance  $r$  de  $e$ .

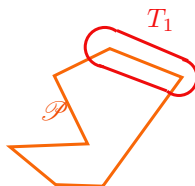


FIGURE 10 – Construction d'un tube autour d'une arête du polygone  $\mathcal{P}$ .

Dans la suite, on note  $T$  l'union de tous les tubes issus des arêtes de  $\mathcal{P}$ .  
 Nous allons utiliser ces tubes seulement pour des valeurs génériques de  $r$ , autrement dit :

**Définition 2.13**

Soit  $r > 0$  lié à un tube.

$r$  est dit générique si à travers chaque point du plan  $x$ , il y a au plus deux tubes qui passent par  $x$  et l'intersection de ces deux tubes est transverse (ie cette intersection est soit un demi-cercle, soit un segment).

**Remarques :**

- Pour  $r$  générique, il existe seulement un nombre fini de points  $x$  qui rencontrent plus d'un tube (appelons ces points des points de discontinuité).
- Les points génériques sont denses dans les réels positifs.

Voyons quelques propriétés de ces tubes :

**Proposition 2.14**

Soit  $\mathcal{U}$  une composante connexe du complémentaire de  $T$  avec la propriété qu'il contient un point à une distance supérieure à  $r$  de  $\mathcal{P}$ . Alors :

- Chaque point de  $\mathcal{U}$  est à une distance supérieure à  $r$  de  $\mathcal{P}$ .  
 En effet, s'il existe un point  $p \in \mathcal{U}$  qui appartient à l'enveloppe convexe d'un certain  $T_e$ . Alors  $p$  est à l'intérieur d'un tube, donc la composante connexe  $\mathcal{U}$  est toute entière à l'intérieur du tube, ce qui contredit le fait qu'il existe un point de  $\mathcal{U}$  se trouvant à une distance plus grande que  $r$  de  $\mathcal{P}$ .
- Si  $q$  est un point de la frontière de  $\mathcal{U}$ , alors il appartient à un certain tube  $T_e$  et sa distance au sommet  $e$  est exactement  $r$ .  
 De plus sa distance à  $\mathcal{P}$  est au moins  $r$ , donc cela signifie que le point le plus proche de  $q$  appartenant à  $\mathcal{P}$  est le point  $e$ . Si  $q$  n'est pas un point de discontinuité, alors ce point le plus proche de  $\mathcal{P}$  est unique. Si  $q$  est un point de discontinuité, alors  $q$  est à une distance  $r$  d'exactly deux points de  $\mathcal{P}$ .
- Le segment allant d'un point de la frontière de  $\mathcal{U}$  à son point le plus proche appartenant à  $\mathcal{P}$  ne doit pas intersecter  $\mathcal{P}$ , à part en le dit point le plus proche appartenant à  $\mathcal{P}$ .
- Comme  $\mathcal{U}$  est connexe et ne rencontre pas  $\mathcal{P}$ , la fonction parité associée à  $\mathcal{P}$  est donc constante sur l'ensemble connexe  $\mathcal{U}$ .
- La frontière de  $\mathcal{U}$  est composée d'un ensemble fini d'arcs de cercles et de segments.  
 On peut montrer que ces arcs de cercles et segments s'étendent autant que possible le long de la frontière de  $\mathcal{U}$  de sorte que ces arcs de cercles et segments aient pour extrémités des points de discontinuité (ou les extrémités d'un tube semi-circulaire).

**Remarque :** Soient  $p$  et  $q$  deux points distincts se trouvant à une distance  $r$  de  $\mathcal{P}$ . Soient  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  les points de  $\mathcal{P}$  se trouvant à une distance  $r$  de  $p$  et  $q$  respectivement.

Alors les segments  $p\bar{p}$  et  $q\bar{q}$  ne s'intersectent pas (sauf en  $\bar{p}$  si  $\bar{p} = \bar{q}$ ).

En fait, puisque que la distance de  $p$  à  $\mathcal{P}$  vaut exactement  $r$  (respectivement celle de  $q$  à  $\mathcal{P}$ ), on voit que les distances de  $p$  à  $\bar{q}$  et de  $q$  à  $\bar{p}$  sont au moins de  $r$ . Donc la bissectrice perpendiculaire au segment  $\bar{p}\bar{q}$  sépare  $p\bar{p}$  et  $q\bar{q}$ .

### 2.2.1 Comment séparer des polygones ?

Nous allons maintenant établir des résultats grâce aux ensembles de tubes que nous avons construit autour d'un polygone.

Continuons dans le contexte du paragraphe précédent avec un polygone  $\mathcal{P}$ , un nombre générique  $r$ , une union de tube  $T$  et une composante connexe  $\mathcal{U}$  du complémentaire de  $T$  admettant un point, qui se trouve à une distance plus grande que  $r$  de  $\mathcal{P}$ . Soit  $\mathcal{V}$  une autre telle composante.

#### Lemme 2.15

Supposons que la fonction parité associée à  $\mathcal{P}$  prend la même valeur sur les composantes  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$ . Soient  $p$  et  $q$  deux points appartenant à la frontière de  $\mathcal{U}$  et à celle de  $\mathcal{V}$  respectivement.

Supposons que  $p \neq q$ .

Supposons qu'il existe un point  $m \in \mathcal{P}$  tel que sa distance à  $p$  soit de  $r$  et sa distance à  $q$  aussi.

Alors l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- soit  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$  et  $p$  et  $q$  sont reliés par un arc de cercle appartenant à la frontière de  $\mathcal{U}$  ;
- soit il existe un arc polygonal  $\mathcal{C}$  de longueur au plus  $2r$  ayant ses extrémités appartenant à  $\mathcal{P}$  et n'intersectant pas  $\mathcal{P}$  ailleurs et tel que  $p$  et  $q$  aient des parités différentes par rapport à chacun des deux polygones formés par  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{P}$  (qui correspondent aux polygones  $P(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  et  $P(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  de la partie précédente).

**Remarque :** On peut remarquer que si on se trouve dans le second cas, chaque point de  $\mathcal{C}$  se trouve à une distance au plus  $r$  de  $\mathcal{P}$ . En particulier,  $\mathcal{C}$  ne peut pas s'intersecter avec une composante telle que  $\mathcal{U}$  qui admet des points tous à une distance plus grande que  $r$  de  $\mathcal{P}$ .

#### DÉMONSTRATION

Le point  $m$  appartient à une certaine arête  $e$  et  $p$  et  $q$  sont sur le tube  $T_e$  pour un certain  $e$ .

Si  $p$  n'est pas sur le tube semi-circulaire, alors il y a exactement deux points de  $T_e$  à une distance  $r$  de  $m$ . Ces points sont  $p$  et  $q$ .

Le segment  $pq$  intersecte  $e$  transversalement à  $m$  et n'intersecte pas  $\mathcal{P}$  ailleurs. Ceci montre que  $p$  et  $q$  ont des parités opposées par rapport à  $\mathcal{P}$ . Ce qui est le contraire de l'affirmation :  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ .

Donc  $p$  et  $q$  appartiennent au même demi-cercle. On peut suivre le contour de ce demi-cercle de  $p$  à  $q$  en restant dans la frontière de la composante  $\mathcal{U}$ , sauf s'il existe un point de discontinuité  $s$  entre  $p$  et  $q$  sur le demi-cercle.

Si la première assertion du lemme n'est pas vérifiée, on utilise le point de discontinuité pour montrer la deuxième assertion.

Soient  $m, m'$  les points de  $\mathcal{P}$  les plus proches de  $s$ . L'arc polygonal joignant  $m$  à  $m'$  joint alors  $\mathcal{P}$  à  $\mathcal{P}$ , a une longueur  $2r$  et sépare  $p$  de  $q$  (sauf dans les cas dégénérés où  $p = s$  ou  $q = s$ ).



Dans les cas dégénérés où  $p = s$  ou  $q = s$ , on a besoin de prendre une petite perturbation polygonale de cet arc, toujours de longueur  $2r$ , afin d'éviter de passer par le point  $s$ . Ceci peut se justifier par le fait que  $r$  est générique et que les deux tubes passant par  $s$  ont des intérieurs qui se chevauchent.

### 2.2.2 Cas d'une seule composante

On continue dans le contexte de la partie précédente, ie en se donnant un polygone  $\mathcal{P}$ , un nombre générique  $r$ , une union de tubes  $T$  et une composante connexe  $\mathcal{U}$  appartenant au complémentaire de  $T$  et ayant un point qui se trouve à une distance supérieure à  $r$  de  $\mathcal{P}$ . Soit  $\mathcal{V}$  une autre telle composante connexe.

Le prochain résultat nous donne un ensemble de conditions suffisantes pour assurer que les deux composantes  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  ayant la même parité sont égales. L'idée de ce lemme est la suivante : on trace la frontière de  $\mathcal{U}$ . En faisant cela, on trace aussi les paramètres de temps  $t$  proches des points de  $\mathcal{P}$  appartenant à la frontière de  $\mathcal{U}$ . On observe une discontinuité dans les paramètres de temps à chaque discontinuité de la frontière de  $\mathcal{U}$ . Cependant les hypothèses du lemme assurent que ces points de discontinuité dans le temps sont suffisamment petits pour ne pas contenir un paramètre de temps provenant d'un point de la frontière de  $\mathcal{U}$  ou de  $\mathcal{V}$ . Dans ce cas, la frontière de  $\mathcal{U}$  assure un contrôle essentiel des paramètres de temps. Par conséquent un paramètre de temps provenant de la frontière de  $\mathcal{V}$  peut être lié à un paramètre de temps provenant de la frontière de  $\mathcal{U}$ . Ceci nous permet de montrer que  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  ont un point de leurs frontières en commun. Pour un tube générique de taille  $r$ , ceci implique que les composantes  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont égales.

#### Lemme 2.16

Soient  $\mathcal{U}, \mathcal{V}, r, T, \mathcal{P}$  comme ci-dessus.

Soit  $R > 0$ .

Supposons que :

- $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  ont la même parité par rapport à  $\mathcal{P}$  ;
- $\mathcal{V}$  contient un point se trouvant à une distance supérieure au  $\max(r, R)$  de  $\mathcal{P}$  ;
- il existe un point intérieur à  $\mathcal{P}$  se trouvant à une distance supérieure à  $R$  de  $\mathcal{P}$  ;
- $\mathcal{U}$  contient un point se trouvant à une distance supérieure au  $\max(r, R)$  de  $\mathcal{P}$  ;
- pour chaque arc polygonal  $\mathcal{C}$  avec extrémités  $(\mathcal{P}(t_1), \mathcal{P}(t_2))$  sur  $\mathcal{P}$ , ne rencontrant pas  $\mathcal{P}$  ailleurs, ayant même parité que  $\mathcal{U}$  et ayant une longueur au plus de  $2r$ , les paramètres de temps  $t_1$  et  $t_2$  satisfont :  $t_1 < t_2$  et  $t_2 - t_1 < \frac{1}{2}$  (quitte à échanger les rôles de  $t_1$  et  $t_2$  si nécessaire).

De plus si on pose  $\mathcal{A}$  l'image de  $[t_1, t_2]$  par  $\mathcal{P}$ , alors le polygone  $P(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  appartient au disque ouvert de diamètre  $R$ .

Sous ces conditions, on a alors  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ .

#### DÉMONSTRATION

Soit  $X$  l'ensemble des points  $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  tels qu'il existe un point  $p$  appartenant à la frontière de  $\mathcal{U}$  tel que  $\mathcal{P}(t)$  est un point proche de  $p$  sur  $\mathcal{P}$ . Autrement dit :

$$X = \{t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \exists \quad p \in \partial\mathcal{U}, \quad \mathcal{P}(t) \text{ est proche de } p \text{ sur } \mathcal{P} \}$$

Décrivons cet ensemble :

- chaque segment de la frontière de  $\mathcal{U}$  forme un intervalle sur  $X$ .
  - chaque arc de cercle de la frontière de  $\mathcal{U}$  donne un point de  $X$ .
- L'ensemble  $X$  est en fait fermé.
- chaque point de la frontière de  $\mathcal{U}$  qui n'est pas un point de discontinuité donne un point de  $X$  bien défini.
  - chaque point de discontinuité de  $\mathcal{U}$  donne précisément deux points  $t_1$  et  $t_2$  sur  $X$ .

Ainsi les points  $\mathcal{P}(t_1)$  et  $\mathcal{P}(t_2)$  sont tous deux à distance  $r$  du point de discontinuité et sont liés par un arc polygonal  $\mathcal{C}$  satisfaisant la condition du lemme. Donc on peut assurer que  $t_1 < t_2$  et  $t_2 - t_1 < \frac{1}{2}$ .

Soit  $Y \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  l'union de ces intervalles  $(t_1, t_2)$  passant outre les points de discontinuité de la frontière de  $\mathcal{U}$ .

Soit  $q$  appartenant à la frontière de  $\mathcal{V}$ . Soit  $\mathcal{P}(t_q) \in \mathcal{P}$  proche de  $q$ .

On distingue alors trois cas :

Cas 1 :  $t_q \in X$

Par définition de  $X$ , il va alors exister  $p$  appartenant à la frontière de  $\mathcal{U}$  qui nous donne le fait que  $t_q \in X$ .

Par le lemme précédent, on a alors deux possibilités.

$\rightsquigarrow$  La première est que  $q$  est joint à  $p$  par un arc de cercle de la frontière de  $\mathcal{U}$ . En particulier, on a que  $q$  appartient à la frontière de  $\mathcal{U}$  et à la frontière de  $\mathcal{V}$ . Puisque  $r$  est un nombre générique, ceci implique que les composantes  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont égales. C'est ce qu'on voulait.

$\rightsquigarrow$  La deuxième est qu'il existe un arc polygonal  $\mathcal{C}$  de longueur au plus  $2r$ , joignant  $\mathcal{P}$  à  $\mathcal{P}$  et séparant  $p$  de  $q$ . Par parité, soit  $\mathcal{V}$ , soit  $\mathcal{U}$  appartient à  $P(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ , donc à l'intérieur du disque de diamètre  $R$ . Ce qui est impossible, puisque  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  admettent des points à une distance supérieure à  $R$  de  $\mathcal{P}$  (par hypothèses du lemme).

Cas 2 :  $t_q \in Y$

Pour réfuter ce cas, on va montrer un fait plus général, qui est que tout point  $q'$  appartenant à la frontière de  $\mathcal{V}' = \{\mathcal{U}, \mathcal{V}\}$  et tel que  $\mathcal{P}(t_0)$  est un point proche de  $q'$ , on a  $t_0 \notin Y$ . En particulier, cela signifie que  $X$  et  $Y$  sont disjoints.

Supposons le contraire, ie  $t_0 \in Y$ . Ceci signifie alors que  $t_0 \in (t_1, t_2)$  où  $\mathcal{P}(t_1)$  et  $\mathcal{P}(t_2)$  sont des points proches sur  $\mathcal{P}$  d'un point de discontinuité  $p \in \partial\mathcal{U}$ . Les deux segments  $p\mathcal{P}(t_1)$  et  $p\mathcal{P}(t_2)$  forment des arcs polygonaux joignant  $\mathcal{P}$  à  $\mathcal{P}$  et de longueur  $2r$ . La composante  $\mathcal{V}'$  et l'arc polygonal  $\mathcal{C}$  ont la même parité par rapport à  $\mathcal{P}$ .

On a  $\mathcal{P}(t_0) \in \mathcal{A}$ , où  $\mathcal{A}$  est l'image de  $[t_1, t_2]$  par  $\mathcal{P}$ . Soit  $\mathcal{B}$  l'autre branche de  $\mathcal{P}$  allant de  $\mathcal{P}(t_1)$  à  $\mathcal{P}(t_2)$ . Alors  $\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ . Les assertions sur les diamètres de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $P(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  empêche  $\mathcal{V}'$  d'appartenir à l'intérieur de  $P(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ . Par le lemme (2.8), on a donc que  $\mathcal{V}'$  a la même parité par rapport à  $P(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  et par rapport à  $\mathcal{P} = P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .

Le segment allant de  $q'$  à  $\mathcal{P}(t_0) \in \mathcal{A}$  n'intersecte pas  $\mathcal{C}$ . Ce segment lie  $\mathcal{V}'$  à  $\mathcal{A}$  sans intersecter  $P(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ . Donc  $\mathcal{A}$  (en excluant ses extrémités) a la même parité par rapport à  $P(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  que  $\mathcal{V}'$ .

On peut maintenant appliquer le lemme (2.9), qui force la parité de  $\mathcal{B}$  à être impaire par rapport à  $P(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ . Donc  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  sont tous contenus dans le disque de rayon  $R$ . Ce qui est incompatible avec la troisième hypothèse du lemme.

Cas 3 :  $t_q \notin X \cup Y$

Ceci implique alors que  $X \cup Y \neq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . L'ensemble  $X \cup Y$  est construit comme étant une union d'intervalles fermés avec leurs extrémités appartenant à  $X$ . Ce qui implique qu'il existe  $t' \in X$  tel que  $\mathcal{P}(t')$  est proche d'un point de discontinuité  $p'$  appartenant à la frontière de  $\mathcal{U}$  et tel qu'il existe un intervalle ouvert de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  qui admet comme extrémité  $t'$  et est disjoint de  $X \cup Y$ .

On considère alors deux cas dépendant de  $t'$ .

↪ Si  $t'$  est un point isolé de  $X$ , alors il provient d'un arc de cercle de la frontière de  $\mathcal{U}$ . Le long de la frontière de  $\mathcal{U}$ , les deux extrémités de cet arc de cercle sont des points de discontinuité et ces deux points de discontinuité donnent des paramètres de temps  $t''$  et  $t'''$  appartenant à  $X$ , avec  $(t'', t')$  et  $(t', t''')$  inclus dans  $Y$ . On peut affirmer que  $t'' < t' < t'''$  (en effet, par exemple on ne peut pas avoir  $t'' < t''' < t'$ , car  $Y$  et  $X$  sont disjoints d'après le cas 2, donc  $t''' \notin (t'', t')$ ). On a  $(t'', t''') \subset X \cup Y$ , ce qui contredit l'hypothèse :  $t'$  appartient à la frontière entre  $X \cup Y$  et son complémentaire.

↪ Si  $t'$  est une extrémité d'un intervalle  $I$  de  $X$ , alors il provient d'un segment de la frontière de  $\mathcal{U}$ . Puisque  $t'$  est un point de discontinuité, il va exister  $t''$  tel que  $\mathcal{P}(t'')$  soit le deuxième point de  $\mathcal{P}$  le plus proche de  $t'$ . De nouveau, d'après le cas 2,  $t''$  doit être du côté opposé de  $t'$  par rapport à  $I$ . Les ensembles  $(t', t'') \subset Y$  et  $I$  forment un voisinage de  $t'$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $t'$  appartient à la frontière entre  $X \cup Y$  et son complémentaire.

Au final le seul cas possible est le cas 1 et la première possibilité de ce cas, qui nous donne l'égalité entre  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$ . D'où le résultat.

## 2.3 Approximation polygonale

Nous sommes maintenant à un stade avancé de la preuve, cependant tout a été fait avec des polygones. Pour poursuivre, nous avons besoin de montrer que toute courbe de Jordan peut être approximée par des polygones. C'est le but de cette partie.

### 2.3.1 Uniforme continuité

Introduisons pour commencer la notion d'uniforme continuité pour une courbe de Jordan.

#### Définition 2.17

Une courbe de Jordan  $\mathcal{J}$  est dite uniformément continue s'il existe  $c > 0$  (dépendant de  $\mathcal{J}$ ), tel que :

$$\forall t, t', \epsilon, \quad \epsilon > 0 \wedge d(t, t') < c(\epsilon) \Rightarrow d(\mathcal{J}(t), \mathcal{J}(t')) < \epsilon$$

**Remarque :** En redéfinissant  $c(\epsilon)$  afin qu'il soit aussi petit qu'on veut, on peut affirmer que pour tout  $\epsilon > 0$ , on a  $c(\epsilon) < \frac{1}{2}$ .

$\mathcal{J}$  est alors un homéomorphisme de son domaine de départ dans son image. L'uniforme continuité de  $\mathcal{J}^{-1}$  s'exprime par l'existence de  $c'$  tel que :

$$\forall t, t', \epsilon, \quad \epsilon > 0 \wedge d(\mathcal{J}(t), \mathcal{J}(t')) < c'(\epsilon) \Rightarrow d(t, t') < \epsilon$$

Le lemme qui suit nous assure qu'un arc de la courbe de Jordan peut être lié à un élément proche de  $\mathcal{J}(t)$ , via le contrôle de ses extrémités.

**Lemme 2.18**

Soit  $\mathcal{J}$  une courbe de Jordan.

Soit  $\epsilon > 0$ , soient  $t, t'$  satisfaisant :  $d(\mathcal{J}(t), \mathcal{J}(t')) < c'(c(\epsilon))$ .

Alors (en adoptant les conventions  $c(\epsilon) < \frac{1}{2}$ ,  $t < t'$  et  $t' - t \leq \frac{1}{2}$ ) :  $\forall t'' \in [t, t']$ , on a :  $d(\mathcal{J}(t), \mathcal{J}(t')) < \epsilon$ .

## DÉMONSTRATION

La démonstration se fait en combinant l'uniforme continuité de  $\mathcal{J}$  et celle de  $\mathcal{J}^{-1}$ .

**2.3.2 Approximation d'une courbe de Jordan**

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat qui suit, se trouvant être fondamental pour la démonstration du théorème.

**Lemme 2.19**

Pour toute courbe de Jordan  $\mathcal{J}$  (paramétrée en temps) et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un polygone  $\mathcal{P}$  paramétré en temps tel que :  $d(\mathcal{J}(t), \mathcal{P}(t)) < \epsilon$ .

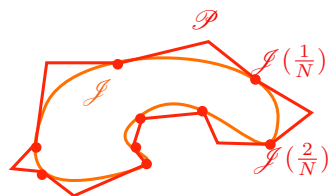


FIGURE 11 – Construction d'un polygone  $\mathcal{P}$  approximant une courbe de Jordan  $\mathcal{J}$ .

## DÉMONSTRATION

On considère un chemin polygonal  $\mathcal{P}_N$  joignant  $\mathcal{J}(\frac{i}{N})$  à  $\mathcal{J}(\frac{i+1}{N})$  (chaque segment étant paramétré en temps, avec une vitesse de parcours constante) pour un entier  $N$  assez grand et pour  $i = 0, \dots, N - 1$ . Ce chemin polygonal n'a pas besoin d'être simple, mais il doit exister un sous-ensemble de  $\mathcal{P}_N$  qui ne s'intersecte pas lui-même et approxime  $\mathcal{J}$  sous la condition du théorème. Tout d'abord,  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $N$  suffisamment grand, tel que le polygone  $\mathcal{P}_N$  approxime  $\mathcal{J}$  sous la condition du théorème à chaque temps  $t$ .

En utilisant les conventions pour les paramètres  $t$  et  $t'$ , on voit que si  $d(\mathcal{J}(t), \mathcal{J}(t')) < c'(c(\epsilon))$ , alors  $d(\mathcal{J}(t), \mathcal{J}(t'')) < \epsilon$  pour tout  $t'' \in [t, t']$ . Plus précisément, pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut trouver  $N$  tel que pour tout point double  $\mathcal{P}_N(t) = \mathcal{P}_N(t')$ , on a  $d(\mathcal{P}_N(t''), \mathcal{J}(t)) < \epsilon$ , pour tout  $t'' \in (t, t')$ . Ainsi la courbe  $\mathcal{J}$  en le point double  $\mathcal{P}_N(t)$  vérifie toujours la condition du théorème. On exclut la boucle fermée de  $\mathcal{P}_N$  sur  $[t, t']$  en arrêtant le chemin au point double  $\mathcal{P}_N(t)$  durant la période de temps  $[t, t']$ . Le résultat donne pour tout  $t$ , la condition du théorème.

Pour faire une exclusion consistante de toutes les intersections d'une collection finie de tels intervalles, on en choisit un qui n'est pas contenu dans un sous-intervalle des autres. On l'exclut et on répète ce processus. En excluant un intervalle à chaque étape, qui n'est pas contenu dans les

autres, le processus itératif enlève une collection disjointe d'intervalles. Le processus se termine car le nombre d'auto-intersections diminue à chaque itération.

L'ensemble résultant inclu dans  $\mathbb{R}^2$  est le polygone désiré, mais mal paramétré, car un chemin qui s'arrête pour un moment à chaque fois qu'il y a un intervalle exclu est non simple. Cependant, il existe une manière de remédier à cela. Proche de chaque intervalle exclu, on reparamètre, ce qui fait qu'au lieu d'avoir un parcours constant du chemin, on a un parcours qui progresse de façon strictement monotone. En changeant la valeur du paramètre par de telles perturbations, la  $\epsilon$ -approximation reste vraie, ce qui termine la preuve.

## 2.4 Construction d'un point intérieur

Soit  $\mathcal{J}$  une courbe de Jordan. Le but de cette partie est de construire un point  $\theta_0$  qui appartient à la région intérieure de chaque approximation polygonale de  $\mathcal{J}$  suffisamment proche de  $\mathcal{J}$ .

### 2.4.1 Les constantes $\beta$ et $w$

Dans cette partie nous allons définir les nombres réels positifs  $\beta$  et  $w$  qui sont des nombres caractéristiques d'une courbe de Jordan.

#### Définition 2.20

Soit  $\mathcal{J}$  une courbe de Jordan.

On définit  $w = w_{\mathcal{J}} > 0$  comme étant la largeur de la plus petite bande verticale contenant  $\mathcal{J}$ .

Dans toute la suite, une telle bande sera fixée.

#### Définition 2.21

Soit  $p \in \mathcal{J}$  un point se trouvant le long du côté gauche de la bande.

Soit  $q \in \mathcal{J}$  un point se trouvant le long du côté droit de la bande.

Il existe alors des arcs distincts  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{J}$  qui lient  $p$  à  $q$ . Si on considère des coordonnées telles que l'axe des ordonnées correspondent à la fin du côté gauche de la bande, on peut trouver une constante  $\beta > 0$  telle que :  $\forall a \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{B}$ , dont les abscisses appartiennent à  $[\frac{w}{3}, \frac{2w}{3}]$ , on a  $d(a, b) \geq \beta$ .

**Remarque :** Quitte à réduire  $\beta$  si nécessaire, on peut affirmer que  $\frac{w}{3} > \beta$ .

### 2.4.2 Construction de $\theta_0$ et $\theta_\infty$

Construisons maintenant un point à l'intérieur et un autre à l'extérieur d'une courbe de Jordan.

#### Lemme 2.22

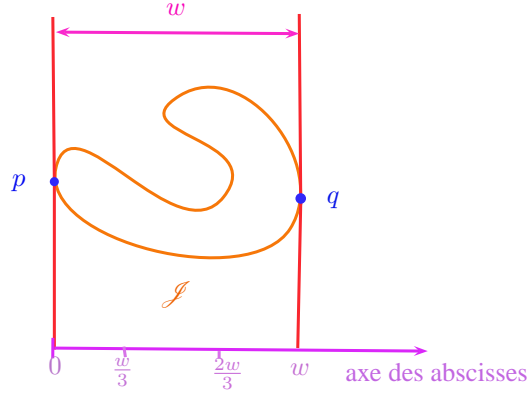


FIGURE 12 – Construction des points  $w$  et  $\beta$ .

Soit  $\mathcal{J}$  une courbe de Jordan.

Soient  $\beta, w, p, q, \mathcal{A}, \mathcal{B}$  rattachés à  $\mathcal{J}$  comme précédemment.

Soit  $\epsilon$  tel que  $0 < \epsilon < \frac{\beta}{2}$ .

Soit  $\mathcal{P}$  une  $\epsilon$ -approximation de  $\mathcal{J}$ .

Soient  $p = \mathcal{P}(t)$  et  $q = \mathcal{P}(t')$ , où  $p = \mathcal{J}(t)$  et  $q = \mathcal{J}(t')$ .

Soient  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{B}'$  les arcs polygonaux de  $\mathcal{P}$  allant de  $p'$  à  $q'$  (correspondant à  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  pour  $\mathcal{J}$ ).

Soit  $\mathcal{L}$  une ligne verticale coupant en deux (de façon bissecteur) la bande verticale de  $\mathcal{J}$ .

Soit  $\mathcal{L}'$  le segment inclu dans  $\mathcal{L}$  déterminé par le lemme (2.10) (appliqué à  $\mathcal{P}, \mathcal{L}, p', q', \mathcal{A}'$  et  $\mathcal{B}'$ ).

Alors un certain point  $\theta_0 \in \mathcal{L}'$  est à distance d'au moins  $\frac{\beta}{2} - \epsilon$  de  $\mathcal{A}'$  et de  $\mathcal{B}'$ .

#### DÉMONSTRATION

Chaque point le long de  $\mathcal{L}'$  est à une distance supérieure à  $\frac{w}{6} > \frac{\beta}{2}$  des points de  $\mathcal{J}$  en dehors de la bande verticale comprise entre  $[\frac{w}{3}, \frac{2w}{3}]$  à la droite de  $p$ .

Soit  $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$  (respectivement  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ ) le sous-ensemble du plan constitué des points à une distance d'au moins  $\frac{\beta}{2}$  de  $\mathcal{A}$  (respectivement  $\mathcal{B}$ ).

$\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$  et  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$  sont ouverts. Les deux ont une intersection non vide avec  $\mathcal{L}'$ , car chacun possède une extrémité de  $\mathcal{L}'$  par construction d'après le lemme (2.10).

Ces intersections le long de  $\mathcal{L}'$  sont vides, car un tel point mettrait  $\mathcal{A}$  à une distance au moins  $\beta$  de  $\mathcal{B}$  sous la bande verticale  $[\frac{w}{3}, \frac{2w}{3}]$ . Par connexité de  $\mathcal{L}'$ , on conclut qu'il existe un certain point  $\theta_0 \in \mathcal{L}'$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} \cup \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ . Il est à distance au moins  $\frac{\beta}{2}$  de  $\mathcal{A}$  et de  $\mathcal{B}$ , donc à distance au moins  $\frac{\beta}{2} - \epsilon$  de  $\mathcal{A}'$  et de  $\mathcal{B}'$ .

On note, dans la suite,  $\theta_0$  le point dont le lemme nous montre l'existence (pour un certain  $\epsilon$  petit). Par le lemme (2.11), il se trouve dans l'intérieur de  $\mathcal{P}'$  pour toute approximation  $\mathcal{P}'$  assez proche de  $\mathcal{J}$ .

Soit  $\theta_\infty$  un point "à l'infini", ie un point qui se trouve suffisamment loin de tout ce qui se passe

dans la preuve précédente. Il sera donc dans la région extérieure de  $\mathcal{P}'$  pour toute approximation  $\mathcal{P}'$  suffisamment proche de  $\mathcal{J}$ .

Soit  $\alpha$  l'indice qui parcourt l'ensemble  $\{0, \infty\}$ . On pose  $\theta_\alpha$  le point correspondant.

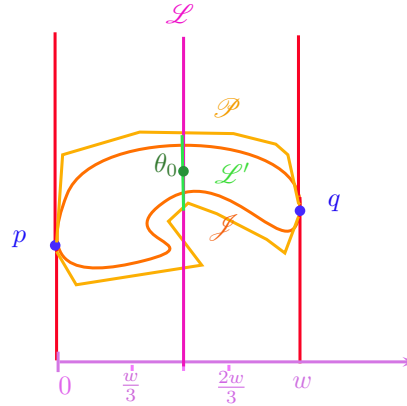


FIGURE 13 – Construction du point  $\theta_0$ .

## 2.5 Construction d'un intérieur et d'un extérieur

Nous sommes maintenant en mesure de donner l'argument principal de la preuve du théorème de Jordan. Pour ce faire nous allons définir les ensembles suivant :

### Définition 2.23

Soit  $\mathcal{J}$  une courbe de Jordan.

Soient  $\theta_\alpha$  les points construits dans la partie précédente, avec  $\alpha \in \{0, \infty\}$ .

On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , des régions non vides, ouvertes et connexes  $\mathcal{U}_\alpha^n$  comme étant les composantes connexes de  $\theta_\alpha$  dans le complémentaire d'une certaine union finie de tubes  $T^n$ .

Ces régions doivent avoir les propriétés suivantes :

1.  $\mathcal{U}_0^n \cap \mathcal{U}_\infty^n = \emptyset$  ;
2.  $\mathcal{U}_\alpha^n \cap \mathcal{J} = \emptyset$  ;
3.  $\mathcal{U}_\alpha^n \subset \mathcal{U}_\alpha^{n+1}$  ;
4.  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{J} \subset \bigcup_{n,\alpha} \mathcal{U}_\alpha^n$ .

### Théorème 2.24 : Théorème de Jordan

Soit  $\mathcal{J}$  une courbe de Jordan.

Alors le complémentaire de l'image de  $\mathcal{J}$  est la réunion de deux ensembles disjoints, non vides, ouverts et connexes.

### Lemme 2.25

Si les régions  $\mathcal{U}_\alpha^n$  peuvent être construites en satisfaisant les quatres conditions définies ci-dessus, alors le théorème de Jordan est vrai.

DÉMONSTRATION

Soit  $V_\alpha = \bigcup \{\mathcal{U}_\alpha^n, n\}$ .

Montrons que  $V_0$  et  $V_\infty$  sont les ensembles disjoints, non vides, ouverts et connexes attendus.

Tout d'abord,  $V_\alpha$  est ouvert car c'est une union d'ouverts. Il est non vide, car contient le point  $\theta_\alpha$ .

Cet ensemble  $V_\alpha$  est connexe car c'est l'union d'ensembles connexes admettant un point commun

$\theta_\alpha$ . Ces ensembles sont dans le complémentaire de  $\mathcal{J}$  par la propriété (2) et donnent le complémentaire tout entier par la propriété (4). Finalement  $V_0$  et  $V_\infty$  sont disjoints par les propriétés (1)

et (3). D'où le résultat.

Afin de compléter la preuve du théorème de Jordan, on considère les objets suivants.

Soit  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs tendant vers 0.

On choisit  $r_0$  assez petit de telle sorte que la construction du point  $\theta_0$  fonctionne.

Ensuite on choisit  $r_{n+1}$  de telle sorte que :  $r_{n+1} < \frac{r_n}{5}$ .

Soit  $\mathcal{P}^n$  une  $\frac{r_n}{4}$ -approximation de  $\mathcal{J}$  donnée par le lemme (2.19).

Soit  $T^n$  une union de tubes autour de  $\mathcal{P}^n$ , avec un paramètre générique  $r'_n \in (\frac{r_n}{2}, r_n)$ .

On considère  $\mathcal{U}_\alpha^n$  la composante connexe du complémentaire de  $T_\alpha^n$  contenant  $\theta_\alpha$ .

Pour terminer la preuve du théorème de Jordan, il faut montrer que les propriétés (1) à (4) sont vérifiées par les ensembles que nous venons de choisir.

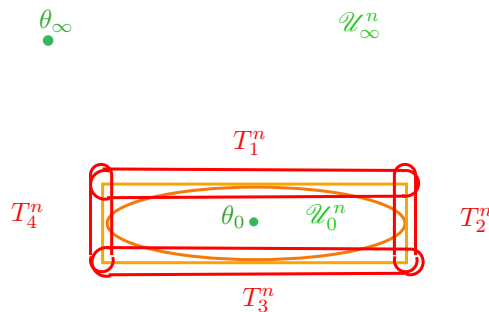


FIGURE 14 – Construction de  $\mathcal{U}_0^n$  et  $\mathcal{U}_\infty^n$ .

### 2.5.1 Vérification des quatres propriétés

Vérifions les quatres propriétés de la définition précédente pour les ensembles que nous venons de construire car alors la démonstration du théorème de Jordan sera terminée.

#### Lemme 2.26

La propriété (1) est vérifiée pour ce choix de  $\mathcal{U}_\alpha^n$ , ie  $\mathcal{U}_0^n \cap \mathcal{U}_\infty^n = \emptyset$ .



DÉMONSTRATION

Les points de  $\mathcal{U}_0^n$  et de  $\mathcal{U}_\infty^n$  ont des parités différentes par rapport au polygone  $\mathcal{P}^n$ , d'où le résultat.

**Lemme 2.27**

La propriété (2) est vérifiée pour ce choix de  $\mathcal{U}_\alpha^n$ , ie  $\mathcal{U}_\alpha^n \cap \mathcal{J} = \emptyset$ .

DÉMONSTRATION

$\mathcal{U}_\alpha^n$  est la  $\theta_\alpha$ -ième composante de  $\mathbb{R}^2 \setminus T^n$ . Chaque point de  $\mathcal{U}_\alpha^n$  est à une distance supérieure à  $r'_n > \frac{r_n}{2}$  de  $\mathcal{P}^n$ .

De plus, chaque point de  $\mathcal{J}$  est à une distance de  $\frac{r_n}{4} < \frac{r_n}{2}$  de  $\mathcal{P}^n$ . D'où le résultat.

**Lemme 2.28**

La propriété (3) est vérifiée pour ce choix de  $\mathcal{U}_\alpha^n$ , ie  $\mathcal{U}_\alpha^n \subset \mathcal{U}_\alpha^{n+1}$ .

DÉMONSTRATION

Montrons que chaque point de la frontière de  $\mathcal{U}_\alpha^{n+1}$  est à distance strictement inférieure à  $r'_n$  de  $\mathcal{P}^n$ . En fait pour avoir cette distance, il faut partir d'un point de la frontière et aller jusqu'à  $\mathcal{P}^{n+1}$ , puis jusqu'à  $\mathcal{J}$ , puis  $\mathcal{P}^n$ , qui ont respectivement les distances :

$$r'_{n+1} + \frac{r_{n+1}}{4} + \frac{r_n}{4} < \frac{5r_{n+1}}{4} + \frac{r_n}{4} < \frac{r_n}{4} + \frac{r_n}{4} < r'_n$$

par récurrence sur les inégalités de  $r_n$ .

De plus, les points de la frontière de  $\mathcal{U}_\alpha^n$  sont exactement à distance  $r'_n$  de  $\mathcal{P}^n$ , d'où  $\mathcal{U}_\alpha^n \subset \mathcal{U}_\alpha^{n+1}$ .

**Lemme 2.29**

La propriété (4) est vérifiée pour ce choix de  $\mathcal{U}_\alpha^n$ , ie  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{J} \subset \bigcup_{n,\alpha} \mathcal{U}_\alpha^n$ .

Plus précisément pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $n$  tel que  $\mathcal{U}_\alpha^n$  contient tous les points  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{J}$  dont la distance à  $\mathcal{J}$  est au moins de  $\epsilon$  et dont la parité par rapport à  $\mathcal{P}^n$  est la même que celle de  $\theta_\alpha$ .

DÉMONSTRATION

Fixons  $\alpha$ . On choisit  $\epsilon > 0$ . Montrons que  $\epsilon$  est plus petit que la distance entre  $\theta_\beta$  et  $\mathcal{J}$ , pour  $\beta \in \{0, \infty\}$ .

On choisit  $n$  assez grand de telle sorte que les conditions qui suivent soient vérifiées (ces conditions sont listées sous les hypothèses du lemme (2.16)) :

- ↪ Le point intérieur  $\theta_0$  est à une distance supérieure à  $\epsilon$  de  $\mathcal{P}^n$  (cela peut se faire facilement avec un  $n$  assez grand, puisque la distance de  $\theta_0$  à  $\mathcal{J}$  est supérieure à  $\epsilon$ ).
- ↪ Le point  $\theta_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha^n$  est à une distance supérieure au  $\max(r'_n, \epsilon)$  de  $\mathcal{P}^n$  (par exemple, prendre un  $n$  assez grand de telle sorte que  $r'_n < \epsilon$ , puis utiliser le fait que la distance de  $\theta_\alpha$  à  $\mathcal{J}$  est supérieure à  $\epsilon$  et que  $\mathcal{P}^n$  approxime  $\mathcal{J}$ ).
- ↪ Chaque paire de points  $(\mathcal{P}^n(t_1), \mathcal{P}^n(t_2))$  de  $\mathcal{P}^n$  dont la distance les séparant est au plus de

$2r'_n$  satisfont  $t_1 < t_2$  et  $t_2 - t_1 < \frac{1}{2}$  (quitte à échanger  $t_1$  et  $t_2$  si nécessaire) (Utiliser la propriété d'uniforme continuité de  $\mathcal{J}^{-1}$  combinée avec le fait que  $\mathcal{P}^n$  donne une suite d'approximations de  $\mathcal{J}$ ).

De plus, pour chaque arc polygonal  $\mathcal{C}$  ayant pour extrémités  $\mathcal{P}^n(t_1)$ ,  $\mathcal{P}^n(t_2)$ , ayant la même parité que  $\mathcal{U}_\alpha^n$  et ayant une longueur d'au plus  $2r'_n$ , l'image  $\mathcal{A}$  de  $[t_1, t_2]$  par  $\mathcal{P}^n$  et  $\mathcal{C}$  appartiennent au disque de diamètre  $\epsilon$  ( pour avoir cette condition, appliquer le lemme (2.18) à  $\mathcal{J}$  et à des arcs polygonaux de longueur plus petite qu'un certain  $\delta$  afin d'avoir une courbe fermée à l'intérieur du disque de diamètre  $\epsilon' < \epsilon$ . Ensuite, une approximation  $\mathcal{P}^n$  suffisamment proche, nous donne des informations sur l'intérieur du disque de diamètre  $\epsilon$ ).

Fixons  $n$  satisfaisant ces conditions.

Soit  $\mathcal{V}$  la composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus T^n$  d'un élément  $x$  tel que dans l'énoncé du lemme. Appliquons le lemme (2.16) à  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$ , alors on obtient que  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ . D'où  $x \in \mathcal{U}$ .

### 3 Application du théorème de Jordan

Le théorème de Jordan, malgré sa "facilité" apparente, peut en fait servir à résoudre d'autres problèmes. Nous allons en voir un célèbre, le *problème des trois maisons*, ou *planarité du graphe biréparti complet  $K_{3,3}$* .

Nous supposons que le théorème de Jordan est vrai pour les polygones, preuve que nous verrons plus loin. (On peut en fait déduire le théorème de Jordan général à partir du théorème de Jordan polygonal à l'aide de cet exemple.)



FIGURE 15 – Le problème des trois maisons.

Le problème est posé ainsi : dans un quartier de trois maisons, chacune doit être reliée aux réseaux de gaz, d'électricité et d'eau. Mais pour des raisons de sécurité, la ville refuse que les raccordements se superposent. Il convient donc, dans la figure 15 de relier chacune des maisons à chacun des points "Gaz", "Éléc" et "Eau" sans que les arêtes ne se superposent.

Dans la figure 16, chaque maison est bien reliée aux trois points, mais les arêtes se croisent ! Ce n'est donc pas une solution au problème.

Remarquons que le problème des trois maisons tel qu'il est posé est équivalent au problème suivant :

Est-il possible de placer trois maisons et des points d'électricité, de gaz et d'eau de telle sorte que chaque maison soit reliée aux trois points ?

Ainsi, on pourra toujours se ramener à la situation de l'hexagone de la figure 17.

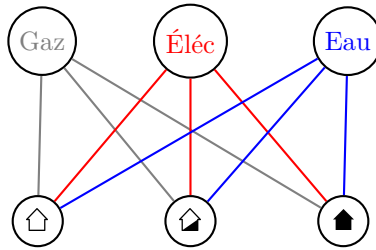


FIGURE 16 – Une solution qui ne marche pas.

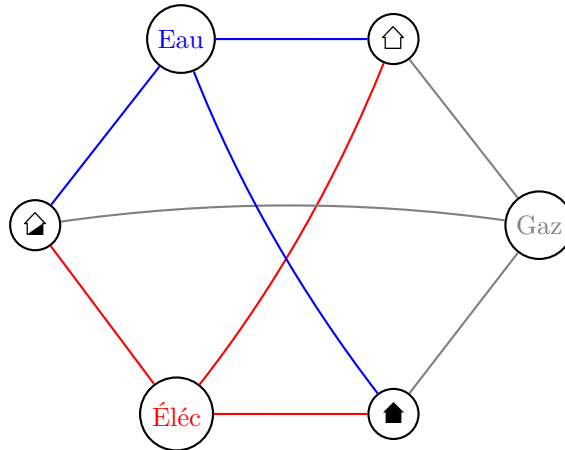


FIGURE 17 – Le problème en hexagone.

Après plusieurs tentatives, on se convainc qu'il n'y a pas de solution. On va le prouver à l'aide du théorème de Jordan polygonal.

Supposons qu'il y a une solution au problème. Alors, en particulier, il y a une solution qui contient le sous-graphe de la figure 18, ou un sous-graphe pouvant s'y ramener en déplaçant seulement les états.

On remarque que l'hexagone forme ici une courbe de Jordan, et donc son complémentaire  $H$  a exactement deux composantes connexes disjointes  $H_i$  et  $H_o$ .

Il nous reste donc les trois diagonales de l'hexagone à placer. Par principe des tiroirs, deux d'entre elles seront dans une des composantes connexes, par exemple l'intérieur  $H_i$  (si elles sont dans l'extérieur  $H_o$ , il suffit de refaire l'hexagone de la figure 18 dans un autre ordre).

On trace une de ces deux diagonales, par exemple en pointillés verts sur la figure 19. Cette courbe verte définit une nouvelle courbe de Jordan, qui sépare donc le plan en deux composantes connexes disjointes  $T_i$  (intérieur) et  $T_o$  (extérieur).

La maison  $\hat{\cup}$  est au milieu de la composante  $T_o$ , et la seconde diagonale contenue dans  $H_i$  (en pointillés rouges) est contrainte de rester dans  $H_i$ . On aboutit ici à une contradiction.

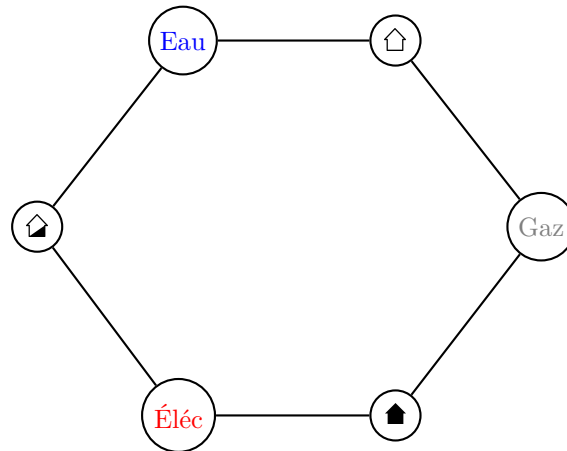


FIGURE 18 – Un hexagone.

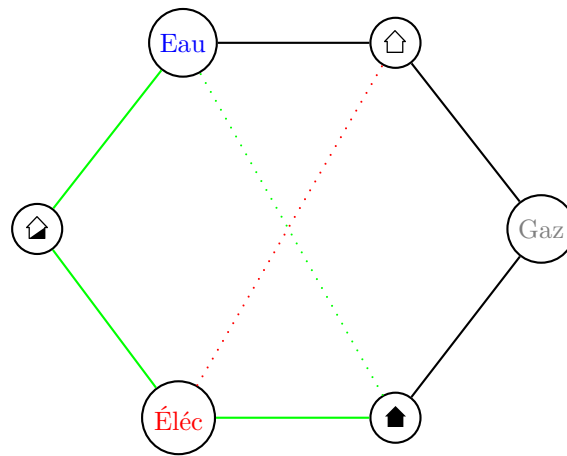


FIGURE 19 – Une contradiction !

Le théorème de Jordan nous a donc permis, associé à quelques résultats de théorie des graphes, de résoudre le problème des trois maisons.

## Conclusion

L'étude du théorème de Jordan nous a permis de nous intéresser tout d'abord à la vie de Camille Jordan, ensuite à la démonstration qu'il a donnée du théorème qui porte aujourd'hui son nom. Nous avons également pu constater qu'il existe plusieurs démonstrations de ce théorème qui sont assez diversifiées et un multitude d'applications, entre autres, celle des maisons, qui nous paraissait concrète et intéressante dans le sens où elle effectue un rapprochement entre le côté théorique de

l'énoncé du théorème et le côté pratique dans son utilisation.

## Références

- [Hal07a] Thomas C. Hales. The jordan curve theorem, formally and informally. *The American Mathematical Monthly*, 114, 2007.
- [Hal07b] Thomas C. Hales. Jordan's proof of the jordan curve theorem. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, 10, 2007.
- [OR] J J O'Connor and E F Robertson. Jordan's biography. <http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Jordan.html>.
- [Wika] Wikipédia. Enigme des trois maisons. [http://fr.wikipedia.org/wiki/Enigme\\_des\\_trois\\_maisons](http://fr.wikipedia.org/wiki/Enigme_des_trois_maisons).
- [Wikb] Wikipédia. Théorème de jordan. [http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème\\_de\\_Jordan](http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Jordan).